

VIETOVE FORMULE. RASTAVLJANJE KVADRATNOG TRINOMA NA LINEARNE ČINIOCE

Brojevi x_1 i x_2 su rešenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ ako i samo ako je

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ove dve jednakosti zovu se Vietove formule.

Čemu one služe?

Osnovna primena da nam pomognu da kada imamo rešenja x_1 i x_2 napravimo kvadratnu jednačinu:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

ili bi možda bilo preciznije

$$a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] = 0 \text{ najčešće se ovde uzima } a = 1, \text{ pa je to formula}$$

Primer 1: Napisati kvadratnu jednačinu čija su rešenja:

a) $x_1 = 3, x_2 = -2$

b) Jedno rešenje je $x_1 = 1 + 2i$

a) $x_1 = 3, x_2 = -2$

$$x_1 + x_2 = 3 + (-2) = +1$$

$$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-2) = -6$$

Formula je $a \left[x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_1 x + \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{-6} \right] = 0$

Pa je $a[x^2 - x - 6] = 0$ najčešće se uzima $a = 1 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

b) $x_1 = 1 + 2i$, Nemamo drugo rešenje?

Pošto znamo da su rešenja kvadratne jednačine konjugovano kompleksni brojevi to mora biti: $x_2 = 1 - 2i$

$$x_1 + x_2 = 1 + 2i + 1 - 2i = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4i^2 =$$

$$\text{(pošto je } i^2 = -1) = 1 + 4 = 5$$

Zamenimo u formulu:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \text{ je tražena kvadratna jednačina}$$

Primer 2: U jednačini $mx^2 - (3m+1)x + m = 0$ odrediti vrednost realnog parametra m tako da važi: $x_1 + x_2 = 5$

Rešenje: $a = m$

$$b = -(3m+1)$$

$$c = m$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-(3m+1)}{m} = \frac{3m+1}{m}$$

$$\text{Kako je } x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow \frac{3m+1}{m} = 5$$

$$3m+1 = 5m$$

$$3m - 5m = -1$$

$$-2m = -1$$

$$m = \frac{1}{2}$$

Primer 3: Odrediti vrednost realnog parametra k tako da za x_1 i x_2 jednačine:

$$x^2 - 4x + 3(k-1) = 0 \text{ važi } x_1 - 3x_2 = 0$$

Rešenje: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$

$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = 3(k-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{array} \right\} \text{rešimo kao sistem}$$

$$\underline{x_1 + x_2 = 4}$$

$$-x_1 + 3x_2 = 0$$

$$\underline{4x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 3}$$

$$\text{Kako je } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 \cdot 1 = \frac{3(k-1)}{1} \Rightarrow k-1 = 1 \Rightarrow k = 2$$

Primer 4: U jednačini $x^2 - (m+1)x + m = 0$ odrediti realan broj m tako da njena rešenja zadovoljavaju jednakost $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Rešenje:

$$\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -(m+1) \\ c = m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-(m+1)}{1} = m+1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} = m \end{array}$$

Ovaj izraz $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow$ se često javlja u zadacima. Da ga izvedemo kao formulu pa ćemo je gotovu upotrebljavati u drugim zadacima.

Krenimo od poznate formule za kvadrat binoma: $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

Odavde je: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ **ZAPAMTI!!!**

Vratimo se u zadatak:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 10 &\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \\ (m+1)^2 - 2m &= 10 \\ m^2 + 2m + 1 - 2m &= 10 \\ m^2 &= 10 - 1 \\ m^2 &= 9 \\ m &= \pm\sqrt{9} \\ m_1 &= 3 \\ m_2 &= -3 \end{aligned}$$

Primer 5: Odrediti koeficijente p i q kvadratne jednačine $x^2 + px + q = 0$ tako da njena

rešenja budu $x_1 = p$
 $x_2 = q$

Rešenja:

$$\begin{array}{l} a = 1 \\ b = p \\ c = q \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{p}{1} = -p \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q \end{array}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} p + q = -p \\ p \cdot q = q \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2p + q = 0 \\ pq - q = 0 \end{array}$$

Iz druge jednačine sistema: $pq - q = 0 \Rightarrow q(p - 1) = 0 \vee p = 1$

Za $q = 0 \Rightarrow$ vratimo u prvu jednačinu:

Za $2p + q = 0 \Rightarrow 2p + 0 = 0 \Rightarrow p = 0$

Za $p = 1 \Rightarrow 2p + q = 0 \Rightarrow 2 + q = 0 \Rightarrow q = -2$

Dakle ta kvadratna jednačina je:

$$\begin{aligned}x^2 + px + q = 0 &\Rightarrow x^2 = 0 \text{ za } p = 0 \text{ i } q = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \text{ za } p = 1 \wedge q = -2\end{aligned}$$

Rastavljanje kvadratnog trinoma na činioce

Kvadratni trinom po x je izraz oblika: $ax^2 + bx + c$ gde su $a, b, c \rightarrow$ brojevi i $a \neq 0$. Brojevi a, b i c su koeficijenti kvadratnog trinoma.

Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ onda je:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Primer1: Kvadratni trinom:

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 + 2x + 2$

Rastaviti na činioce.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ najpre rešimo kvadratnu jednačinu:

$$\begin{array}{lll}a = 1 & D = b^2 - 4ac & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} \\ b = -5 & D = 25 - 24 & x_1 = 3 \\ c = 6 & D = 1 & x_2 = 2\end{array}$$

Formula: $a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 3)(x - 2) = (x - 3)(x - 2)$

Dakle: $x^2 + 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

b) $x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 2 \quad D = 4 - 8 = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \frac{2(-1 \pm i)}{2}$$

$$x_1 = -1 + i$$

$$x_2 = -1 - i$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x + 1 - i)(x + 1 + i)$$

Dakle: $x^2 + 2x + 2 = (x + 1 - i)(x + 1 + i)$

Primer 2: Skratiti razlomak: $\frac{3x^2 + 2x - 8}{12x^2 - 7x - 12}$

Rešenje: Uzećemo posebno imenilac i posebno brojilac i rastaviti na činioce.

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$a = 3 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$b = 2 \quad D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 8 \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 10}{6}$$

$$c = -8 \quad D = 4 + 36 \quad x_1 = \frac{-2 + 10}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$D = 100$$

$$x_2 = \frac{-2 - 10}{6} = -2$$

Dakle: $3x^2 + 2x - 8 = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - \frac{4}{3})(x + 2)$

$$12x^2 - 7x - 12 = 0$$

$$a = 12 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$b = -7 \quad D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot (-12) \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm 25}{24}$$

$$c = -12 \quad D = 49 + 576 \quad x_1 = \frac{7 + 25}{24} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

$$D = 625$$

$$x_2 = \frac{7 - 25}{24} = \frac{18}{24} = -\frac{3}{4}$$

Dakle: $12x^2 - 7x - 12 = a(x - x_1)(x - x_2)12(x - \frac{4}{3})(x + \frac{3}{4})$

Vratimo se sad u razlomak

$$\frac{3x^2 + 2x - 8}{12x^2 - 7x - 12} = \frac{3(x - \frac{4}{3})(x + 2)}{12(x - \frac{4}{3})(x + \frac{3}{4})} = \frac{x + 2}{4(x + \frac{3}{4})}$$

Naravno uz uslov

$$x - \frac{4}{3} \neq 0 \quad \text{i} \quad x + \frac{3}{4} \neq 0$$

$$x \neq \frac{4}{3} \quad \quad \quad x \neq -\frac{3}{4}$$

Primer 3: Skratiti razlomak: $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

Rešenje: $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$a = 1 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$b = -2 \quad D = 4 + 12 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$c = -3 \quad D = 16 \quad x_1 = 3$$

$$x_2 = -1$$

Dakle: $x^2 - 2x - 3 = a(x + x_1)(x + x_2) = (1(x - 3)(x - (-1))) = (x - 3)(x + 1)$

$x^3 + 1 \rightarrow$ ćemo rastaviti po formuli:

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \quad \text{VIDI POLINOMI}$$

pa je: $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

Vratimo se u razlomak:

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{x^2 - x + 1}{x - 3} \quad \text{naravno uz uslov} \quad \begin{matrix} x - 3 \neq 0 \\ x \neq 3 \end{matrix} \quad \text{i} \quad \begin{matrix} x + 1 \neq 0 \\ x \neq -1 \end{matrix}$$

U nekim zadacima nam traže da rešenja budu pozitivna (ili negativna). Pokažimo koji su to uslovi:

1) Rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine sa realnim koeficijentima su:

$$\text{Realna i Pozitivna} \Leftrightarrow D \geq 0, \frac{b}{a} < 0, \frac{c}{a} > 0$$

2) Rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine sa realnim koeficijentima su:

Realna i Negativna $\Leftrightarrow D \geq 0, \frac{b}{a} > 0, \frac{c}{a} > 0$

Ova razmišljanja (teoreme) proizilaze iz Vietovih pravila:

→ Da bi rešenja bila realna je $D \geq 0$

→ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

1) x_1 i x_2 pozitivna $\Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0$

$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$

2) x_1 i x_2 negativna $\Rightarrow x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0$

$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$

minus puta minus je plus

Primer: Odrediti parameter m tako da rešenja jednačine $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ budu pozitivna.

Rešenja: Iz $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ vidimo da je

$a = 1$

$b = -3$

$c = 2m - 1$

$D \geq 0, \frac{b}{a} < 0, \frac{c}{a} > 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 1)$

$D = 9 - 8m + 4$

$D = 13 - 8m$

$D \geq 0 \Rightarrow 13 - 8m \geq 0$ (**Pazi: znak se okreće**)

$-8m \geq -13$

$m \leq \frac{13}{8}$

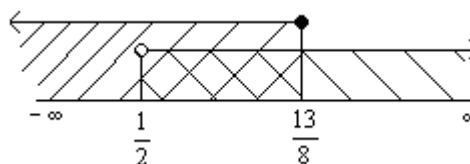
$\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-3}{1} < 0 \Rightarrow$ Zadovoljeno!!!

$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{2m - 1}{1} < 0$

$2m - 1 < 0$

$2m < 1$

$m < \frac{1}{2}$



$m \in \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{8} \right]$