

TAČKA i PRAVA

Najpre ćemo se upoznati sa osnovnim formulama i njihovom primenom.

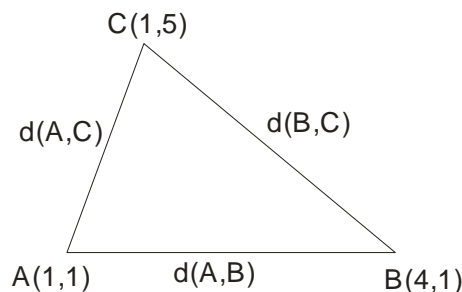
1. Rastojanje između dve tačke

Ako su nam date tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, onda rastojanje između njih računamo po formuli

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Primer 1.

Odrediti dužine stranica trougla čija su temena $A(1, 1)$, $B(4, 1)$ i $C(1, 5)$



Da vas ne zbuni, nema veze da li ćete obeležiti $d(A, B)$ ili $d(B, A)$ jer je rešenje isto.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$

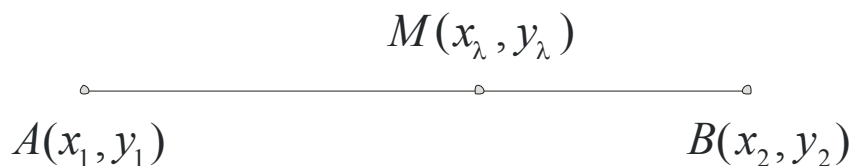
$$d(A, C) = \sqrt{(1-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{0+16} = 4$$

$$d(B, C) = \sqrt{(1-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

2. Deljenje duži u datoj razmeri

Ako je tačka $M(x_\lambda, y_\lambda)$ unutrašnja tačka duži AB, gde je $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ i ako je data razmera $AM : MB = \lambda$ to jest $(\frac{AM}{MB} = \lambda)$, u kojoj tačka M deli duž AB, onda se koordinate tačke M računaju po obrascima

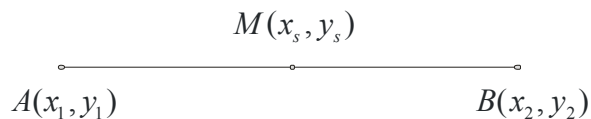
$$M(x_\lambda, y_\lambda) \rightarrow x_\lambda = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{i} \quad y_\lambda = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$



3. Sredina duži

Ako je tačka $M(x_s, y_s)$ sredina duži AB ($A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$) onda se njene koordinate računaju po formuli

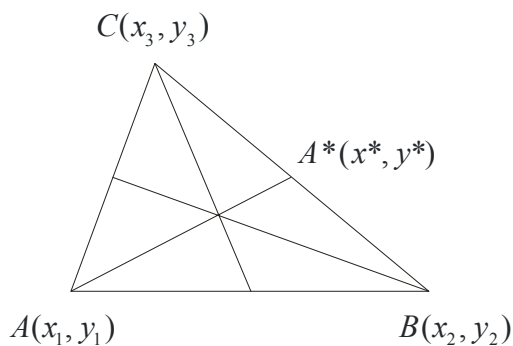
$$M(x_s, y_s) \rightarrow x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{i} \quad y_s = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Primer 2.

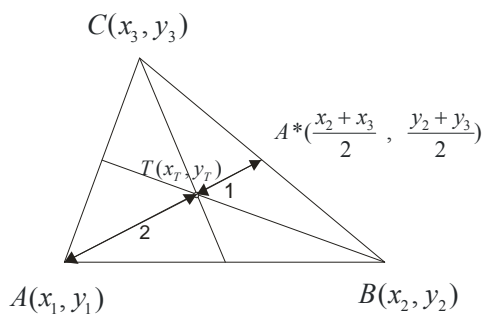
Izvesti formule za koordinate težišta trougla!

Da se podsetimo, težište se nalazi u preseku težišnih duži i težište deli težišnu duž u odnosu 2 : 1.



Najpre ćemo naći koordinate tačke $A^*(x^*, y^*)$ kao sredinu duži BC.

$$A^*(x^*, y^*) \rightarrow x^* = \frac{x_2 + x_3}{2} \quad \text{i} \quad y^* = \frac{y_2 + y_3}{2}$$



Dalje ćemo iskoristiti formulu za deljenje duži u datoj razmeri, gde je $AT : TA^* = 2 : 1 = 2$

www.matematiranje.com

$$T(x_T, y_T) \rightarrow x_T = \frac{x_1 + 2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{i} \quad y_T = \frac{y_1 + 2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right)}{1+2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

4. Površina trougla preko koordinata temena

Neka su $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ temena datog trougla ABC određena pomoću naznačenih koordinata u odnosu na pravougli koordinatni sistem xOy, tada je površina trougla data obrascem

$$P_{\square} = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

može i preko determinante(naravno, ko je upoznat sa njihovim izračunavanjem)

$$P_{\square} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Apsolutna vrednost je tu da nam obezbedi da rešenje ne bude negativno, jer površina ne može biti negativan broj.

Primer 3.

Izračunati površinu trougla ABC ako je $A(-2,3)$; $B(8,-2)$ i $C(3,8)$

$$P_{\square} = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

$$P_{\square} = \frac{1}{2} |-2(-2-8) + 8(8-3) + 3(3-(-2))|$$

$$P_{\square} = \frac{1}{2} |-2(-10) + 8 \cdot 5 + 3(3+2)|$$

$$P_{\square} = \frac{1}{2} |20 + 40 + 15|$$

$$P_{\square} = \frac{1}{2} |75|$$

$$P_{\square} = 37,5$$

PRAVA

i) **opšti (implicitni oblik) je** $ax + by + c = 0$

ii) **eksplicitni oblik je** $y = kx + n$

Ovaj oblik nam je najbitniji jer se koristi u mnogim formulama. U njemu je :

k - koeficijent pravca ($k = \operatorname{tg} \alpha$, gde je α ugao koji prava gradi sa pozitivnim smerom x – ose)

n - je odsečak na y - osi

Kako preći iz opšteg u eksplicitni oblik?

$ax + by + c = 0 \rightarrow$ sve sa y ostavimo levo a ostale prebacimo desno

$by = -ax - c \rightarrow$ sad sve podelimo sa b

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Oдавde je $k = -\frac{a}{b}$ i $n = -\frac{c}{b}$

Primer 4.

Pravu $7x + 3y + 23 = 0$ prebaciti u eksplicitni oblik i naći k i n

$7x + 3y + 23 = 0 \rightarrow$ sve sa y ostavimo levo a ostale prebacimo desno

$3y = -7x - 23 \rightarrow$ sad sve podelimo sa 3

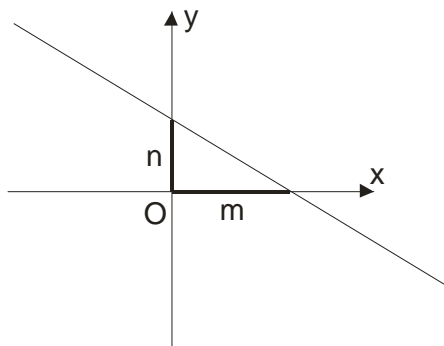
$$y = -\frac{7}{3}x - \frac{23}{3}$$

Oдавde je $k = -\frac{7}{3}$ i $n = -\frac{23}{3}$

iii) $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ je **segmentni oblik**

m – je odsečak na x osi

n – je odsečak na y osi



Primer 5.

U jednačini $px + (p+1)y - 8 = 0$ odrediti parametar p , tako da prava gradi dva puta veći odsečak na apscisnoj osi nego na ordinatnoj osi.

Prava gradi dva puta veći odsečak na apscisnoj osi nego na ordinatnoj osi, znači $m = 2n$

Sredimo datu jednačinu prave da bi iz nje mogli da pročitatamo m i n .

$$px + (p+1)y - 8 = 0$$

$$px + (p+1)y = 8 \quad \text{sve podelimo sa 8}$$

$$\frac{px}{8} + \frac{(p+1)y}{8} = 1 \quad \text{oslobodimo x i y}$$

$$\frac{x}{\frac{8}{p}} + \frac{y}{\frac{8}{p+1}} = 1 \rightarrow \text{odavde je } m = \frac{8}{p} \quad \text{i} \quad n = \frac{8}{p+1}$$

Sad ovo zamenimo u $m = 2n$

$$m = 2n$$

$$\frac{8}{p} = 2 \cdot \frac{8}{p+1}$$

$$\frac{8}{p} = \frac{16}{p+1}$$

$$16p = 8(p+1)$$

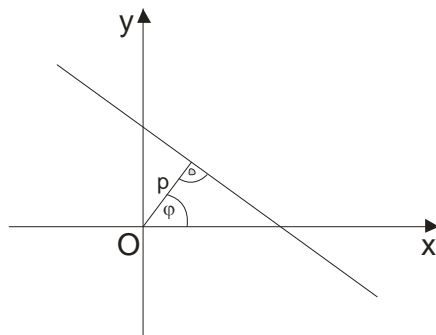
$$16p = 8p + 8$$

$$16p - 8p = 8$$

$$8p = 8$$

$$p = 1$$

iv) $x \cos \varphi + y \sin \varphi = p$ je **normalni oblik** jednačine prave



U ovoj jednačini je :

p je normalno rastojanje od koordinatnog početka $(0,0)$ do naše prave

φ je ugao koji rastojanje p gradi sa pozitivnim smerom x ose

Formula za prelazak iz opšteg u normalni oblik je :

$$ax + by + c = 0 \rightarrow \frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

ali pazimo, ispred korena uzimamo znak suprotan od znaka broja c .

Primer 6.

Svedi jednačinu $4x - 3y + 5 = 0$ na normalni oblik.

$$4x - 3y + 5 = 0 \rightarrow \frac{4x - 3y + 5}{-\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0 \quad (\text{minus ispred korena jer je } c=5)$$

$$\frac{4x - 3y + 5}{-\sqrt{25}} = 0 \rightarrow \frac{4x - 3y + 5}{-5} = 0 \rightarrow -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1 = 0 \text{ a odavde je :}$$

$$p=1, \quad \cos\varphi = -\frac{4}{5}, \quad \sin\varphi = \frac{3}{5}$$

v) **Prava kroz tačku** $A(x_1, y_1)$ sa koeficijentom pravca k je : $y - y_1 = k(x - x_1)$

vi) **Prava kroz tačke** $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ je : $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Primećujete da je onda $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Kakav može biti međusoban položaj dve prave u ravni?

1) Mogu da se seku

Tačku preseka nalazimo rešavajući sistem od te dve jednačine !

Ako posmatramo prave $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$ onda je ugao pod kojim se seku dat formulom:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$

Ako se te dve prave seku pod pravim uglom, onda je $k_1 \cdot k_2 = -1$ (**uslov normalnosti**)

2) Mogu da budu paralelne

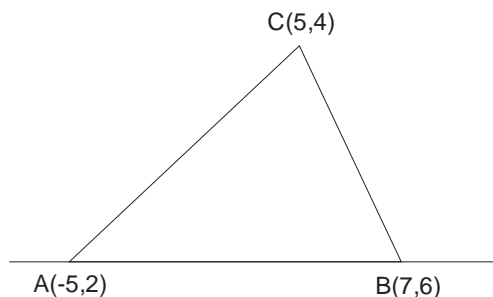
Prave $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$ su paralelne ako je $k_1 = k_2$ (**uslov paralelnosti**)

Primer 7.

Data su temena trougla $A(-5,-2)$, $B(7,6)$, $C(5,4)$. Odrediti:

- a) jednačinu stranice AB
- b) jednačinu visine h_c
- c) ugao kod temena A

a) Upotrebićemo formulu za jednačinu prave kroz dve tačke (A i B)



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - (-2) = \frac{6 - (-2)}{7 - (-5)} (x - (-5))$$

$$y + 2 = \frac{6 + 2}{7 + 5} (x + 5)$$

$$y + 2 = \frac{8}{12} (x + 5)$$

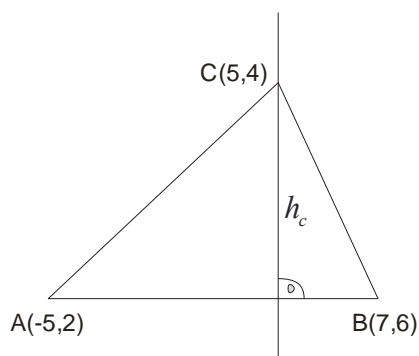
$$y + 2 = \frac{2}{3} (x + 5)$$

$$y = \frac{2}{3} x + \frac{2}{3} \cdot 5 - 2$$

$$y = \frac{2}{3} x + \frac{10}{3} - \frac{6}{2}$$

$$y = \frac{2}{3} x + \frac{4}{3}$$

b)



Jednačinu visine h_c ćemo naći kao jednačinu prave kroz jednu tačku C(5,4) a njen koeficijent pravca mora da zadovoljava uslov normalnosti sa pravom AB.

Koeficijent pravca prave AB : $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ je $k_1 = \frac{2}{3}$. Naša prava je normalna na AB, pa je :

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad y - y_1 = k(x - x_1)$$

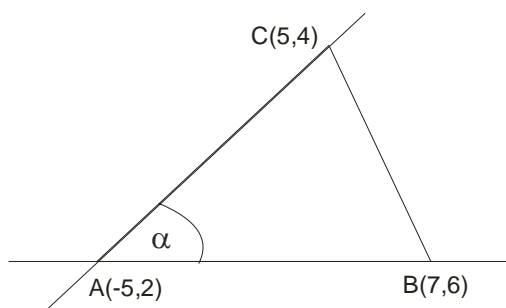
$$k_2 = -\frac{1}{\frac{2}{3}} \quad y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 5)$$

$$k_2 = -\frac{3}{2} \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2} + 4$$

$$k_2 = -\frac{3}{2} \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{23}{2}$$

c) Ugao kod temena A je ustvari ugao između pravih AB i AC. Čim nam traže neki ugao koristimo obrazac

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$



Iz prave AB već imamo koeficijent pravca $k_1 = \frac{2}{3}$.

Ne moramo tražiti celu jednačinu prave AC već samo njen koeficijent pravca.

A(-5,-2), C(5,4) menjamo u $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$k_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k_2 = \frac{4 - (-2)}{5 - (-5)}$$

$$k_2 = \frac{6}{10}$$

$$k_2 = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}} \right|$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-\frac{1}{15}}{1 + \frac{6}{15}} \right|$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-\frac{1}{15}}{\frac{21}{15}} \right|$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{21}$$

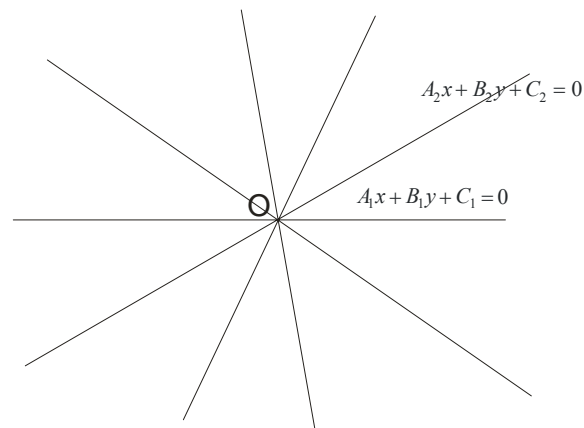
$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{21}$$

Pramen pravih

Ako su $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ jednačine dveju pravih koje se seku u tački O, tada je :

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

jednačina pramena pravih sa centrom u tački O.



Znači, da bi opisali pramen pravih, potrebne su nam dve prave iz tog pramena.

Odstojanje tačke $A(x_1, y_1)$ od prave $ax + by + c = 0$ dato je formulom:

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Primer 8.

U pramenu pravih $2x + y + 4 + \lambda(x - 2y - 3) = 0$ odrediti pravu čije odstojanje od tačke $P(2, -3)$ iznosi $\sqrt{10}$.

Najpre prepakujemo jednačinu pramena:

$$2x + y + 4 + \lambda(x - 2y - 3) = 0$$

$$2x + y + 4 + \lambda x - 2\lambda y - 3\lambda = 0 \quad \text{upakujemo one uz } x, \text{ pa uz } y, \text{ pa slobodne ...}$$

$$(2 + \lambda)x + (1 - 2\lambda)y + 4 - 3\lambda = 0$$

$$\text{Oдавde možemo videti da je } a = 2 + \lambda, \quad b = 1 - 2\lambda$$

Sad uzimamo formulu za rastojanje tačke od prave

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|(2 + \lambda) \cdot 2 + (1 - 2\lambda) \cdot (-3) + 4 - 3\lambda|}{\sqrt{(2 + \lambda)^2 + (1 - 2\lambda)^2}}$$

$$\sqrt{10} = \frac{|4 + 2\lambda - 3 + 6\lambda + 4 - 3\lambda|}{\sqrt{4 + 4\lambda + \lambda^2 + 1 - 4\lambda + 4\lambda^2}}$$

$$\sqrt{10} = \frac{|5\lambda + 5|}{\sqrt{5\lambda^2 + 5}}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\text{Oдавde sredjivanjem dobijamo dva rešenja: } \lambda_2 = -\frac{9}{10}$$

Kad ova rešenja vratimo u pramen $2x + y + 4 + \lambda(x - 2y - 3) = 0$ dobijamo tražene prave:

$$3x - y + 1 = 0$$

$$11x + 28y + 67 = 0$$

