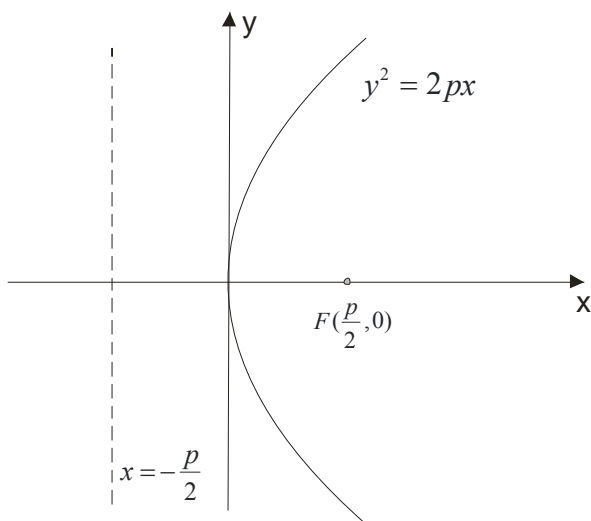


PARABOLA

Parabola je skup tačkaka u ravni sa osobinom da je rastojanje svake tačke od jedne stalne tačke (žiže) jednako odstojanju te tačke od jedne stalne prave (direktrise).



$F(\frac{p}{2}, 0)$ je žiža parabole.

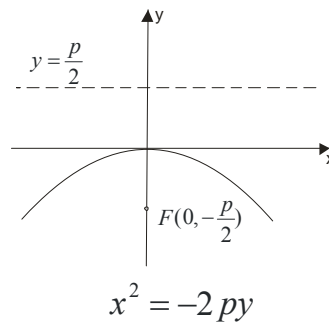
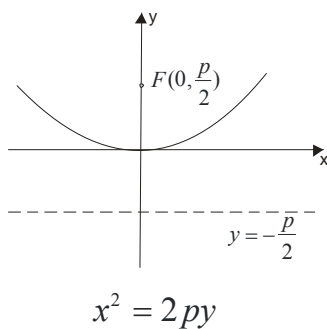
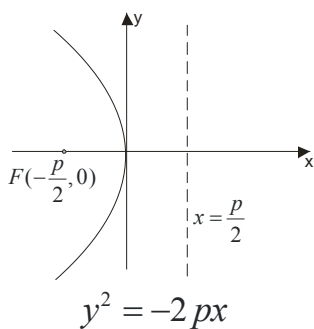
Prava $x = -\frac{p}{2}$ je direktrisa parabole ili $x + \frac{p}{2} = 0$.

Odstojanje tačke F od direktrise obeležava se sa p i naziva se parametar parabole.

Koordinatni početak je teme parabole.

Jednačina parabole je $y^2 = 2px$

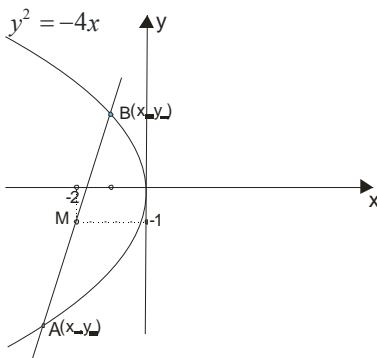
Naravno, ova parabola se najviše proučava, a da vas ne iznenadi evo i ostalih parabola:



Primer 1.

Data je parabola $y^2 = -4x$. Kroz njenu tačku $M(-2, -1)$ postaviti tetivu koja je tom tačkom prepolovljena.

Postavimo najpre problem, skicirajući ga...



Neka je AB tražena tetiva. Tačka M je sredina duži AB pa mora da važi:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2 \rightarrow x_1 + x_2 = -4$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = -1 \rightarrow y_1 + y_2 = -2$$

Tačke A i B pripadaju paraboli, pa njihove koordinate možemo menjati umesto x i y u jednačini parabole:

$$A(x_1, y_1) \in y^2 = -4x \rightarrow y_1^2 = -4x_1$$

$$B(x_2, y_2) \in y^2 = -4x \rightarrow y_2^2 = -4x_2$$

Na ovaj način smo dobili 4 jednačine sa 4 nepoznate. Možemo tražiti koordinate tačaka A i B ali je pametnije samo naći koeficijent pravca prave koja prolazi kroz AB i onda upotrbiti jednačinu prave kroz jednu tačku. $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$y_1^2 = -4x_1$$

$$y_2^2 = -4x_2 \quad \text{oduzmemo od druge prvu jednačinu}$$

$$y_2^2 - y_1^2 = -4x_2 - (-4x_1)$$

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = -4x_2 + 4x_1 \quad \text{znamo da je } y_2 + y_1 = -2$$

$$(y_2 - y_1)(-2) = -4(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2$$

Sada jednačina prave kroz jednu tačku $M(-2, -1)$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - (-1) = 2(x - (-2))$$

$$y + 1 = 2x + 4$$

$$y = 2x + 3$$

Evo jednačine tražene tetive!

Prava i parabola

Slično kao kod kružnice , elipse i hiperbole da bi odredili međusobni položaj prave i parabole, rešavamo sistem jednačina:

$$y = kx + n \quad \text{i} \quad y^2 = 2px$$

- Ako sistem nema rešenja , onda se prava i parabola ne seku, to jest $p < 2kn$
- Ako sistem ima dva rešenja, onda prava seče parabolu u dvema tačkama $p > 2kn$
- Ako sistem ima jedno rešenje, prava je tangenta parabole i zadovoljava USLOV DODIRA: $p = 2kn$

Napomena

Ako nam traže tangentu parabole u datoj tački (x_0, y_0) na paraboli , onda imamo gotovu formulu:

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0)$$

Primer 2.

U kojoj tački parabole $y^2 = 16x$ je tangenta nagnuta pod uglom od 135° prema x-osi.

Obeležimo tu tačku sa (x_0, y_0) . Tangenta će biti $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$, odnosno ,iz jednačine parabole je

$$2p = 16$$

$$p = 8$$

$$y \cdot y_0 = 8(x + x_0)$$

$$y \cdot y_0 = 8x + 8x_0$$

$$y = \frac{8}{y_0}x + \frac{8x_0}{y_0}$$

$$k = \frac{8}{y_0}$$

Našli smo koeficijent pravca te prave , a kako je

$$k = \operatorname{tg}\alpha$$

$$k = \operatorname{tg}135^\circ$$

$$k = -1$$

$$k = \frac{8}{y_0}$$

Onda je

$$-1 = \frac{8}{y_0} \rightarrow y_0 = -8$$

Ovu vrednost zamenimo u jednačinu parabole i imamo:

$$y^2 = 16x$$

$$(-8)^2 = 16x$$

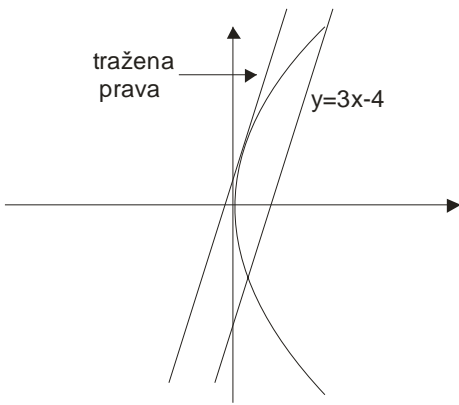
$$16x = 64$$

$$x = 4$$

Dakle, tražena tačka na paraboli je $(4, -8)$

Primer 3.

Napisati jednačinu tangente parabole $y^2 = 12x$ ako je poznato da je paralelna sa pravom $3x - y - 4 = 0$



Kako je naša prava paralelna sa datom, one imaju isto k (uslov paralelnosti)

$$3x - y - 4 = 0$$

$$y = 3x - 4$$

$$k = 3$$

Naša tražena prava je dakle $y = 3x + n$, a n ćemo naći pomoću uslova dodira

Iz parabole je $y^2 = 12x \rightarrow 2p = 12 \rightarrow p = 6$

$$p = 2kn$$

$$6 = 2 \cdot 3n$$

$$6 = 6n$$

$$n = 1$$

Rešenje je $y = 3x + 1$

Primer 4.

Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih $y^2 = 4x$ i $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$

Da najpre sredimo kružnicu

$$x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 9 = 0$$

$$\underline{x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 9 = 0}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 10 \rightarrow p=1, q=0, r^2=10$$

Neka je tražena tangenta $y = kx + n$.

Ona mora da zadovoljava i uslov dodira sa parabolom i sa kružnicom.

Iz jednačine parabole $y^2 = 4x$ je $2p = 4$, pa je $p = 2$

Ovo zamenimo u uslov dodira

$$p = 2kn$$

$$2 = 2kn$$

$$\boxed{kn = 1}$$

Sada uslov dodira za kružnicu

$$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$$

$$10(k^2 + 1) = (1 \cdot k + n)^2$$

$$\boxed{10(k^2 + 1) = (k + n)^2}$$

Dobili smo dve jednačine sa po dve nepoznate, pa rešavamo sistem

$$\boxed{10(k^2 + 1) = (k + n)^2}$$

$$\boxed{kn = 1}$$

$$n = \frac{1}{k}$$

$$10(k^2 + 1) = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2$$

$$10(k^2 + 1) = \left(\frac{k^2 + 1}{k}\right)^2$$

$$10(k^2 + 1) = \frac{(k^2 + 1)^2}{k^2}$$

$$10k^2 = k^2 + 1$$

$$9k^2 = 1$$

$$k^2 = \frac{1}{9} \rightarrow k_1 = \frac{1}{3}, k_2 = -\frac{1}{3}$$

Vratimo se da nađemo n

$$kn = 1$$

$$k_1 = \frac{1}{3} \rightarrow n_1 = 3$$

$$k_2 = -\frac{1}{3} \rightarrow n_2 = -3$$

Jednačine tangenti su

$$t_1: y = \frac{1}{3}x + 3$$

$$t_2: y = -\frac{1}{3}x - 3$$

Zašto nam se javljaju dva rešenja?

Pa ako skiciramo problem, vidimo da je to očigledno...

