

KVADRATNA NEJEDNAČINA ZNAK KVADRATNOG TRINOMA

Kvadratne nejednačine su oblika:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

gde je x -realna promenljiva (nepoznata) i a, b, c su realni brojevi, $a \neq 0$.

U delu kvadratna funkcija smo analizirali kako može izgledati grafik kvadratne funkcije u zavisnosti od znaka a i D . Podsetimo se:

$$1) a > 0, D > 0 \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & + & & - & & + \\ & & | & & | & & \\ -\infty & & x_1 & & x_2 & & \infty \end{array}$$

$$2) a > 0, D = 0 \Rightarrow y \geq 0 \text{ uvek}$$

$$3) a > 0, D < 0 \Rightarrow y > 0 \text{ uvek}$$

$$4) a < 0, D > 0 \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & - & & + & & - \\ & & | & & | & & \\ -\infty & & x_1 & & x_2 & & \infty \end{array}$$

$$5) a < 0, D = 0 \Rightarrow y \leq 0 \text{ uvek}$$

$$6) a < 0, D < 0 \Rightarrow y < 0 \text{ uvek}$$

Naravno $y = ax^2 + bx + c$

Primer 1) Odrediti znak trinoma:

a) $3x^2 - 11x - 4$

b) $-5x^2 - x + 4$


v) $9x^2 + 12x + 4$

g) $-x^2 - 6x - 9$

Rešenja

a) Najpre rešimo odgovarajuću kvadratnu jednakost: $3x^2 - 11x - 4 = 0$

$$\begin{array}{lll}
 a=3 & D=b^2-4ac & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 \pm 13}{6} \\
 b=-11 & D=121+48 & x_1 = 4 \\
 c=-4 & D=169 & x_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}
 \end{array}$$

Pošto je $a=3 > 0$ i $D=169 > 0$ (prva situacija): 

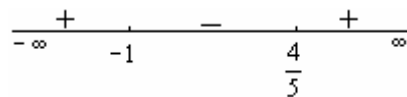
$$3x^2 - 11x - 4 > 0 \text{ za } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (4, \infty)$$

$$3x^2 - 11x - 4 < 0 \text{ za } x \in \left(-\frac{1}{3}, 4\right)$$

b) $-5x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow$ **PAZI:** nema množenja i deljenja nekim brojem!!!

$$\begin{array}{lll}
 a=-5 & & x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{-10} \\
 b=-1 & D=1+80 & x_1 = -1 \\
 c=4 & D=81 & x_2 = \frac{-8}{-10} = \frac{4}{5}
 \end{array}$$

Pošto je $a < 0, D > 0$ (situacija 4)



$$-5x^2 - x + 4 > 0 \text{ za } x \in \left(-1, \frac{4}{5}\right)$$

$$-5x^2 - x + 4 < 0 \text{ za } x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$$

v) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

$$\begin{array}{lll}
 a=9 & & x_{1,2} = \frac{-12 \pm 0}{18} \\
 b=12 & D=144-144 & x_1 = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3} \\
 c=4 & D=0 & x_2 = -\frac{2}{3}
 \end{array}$$

Pošto je $a > 0$ i $D=0 \rightarrow 9x^2 + 12x + 4 \geq 0$ uvek a ovo vidimo i iz $(3x+2)^2 \geq 0$

g) $-x^2 - 6x - 9$

$$\begin{array}{lll} a = -1 & & x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{-2} \\ b = -6 & D = 36 - 36 & x_1 = -3 \\ c = -9 & D = 0 & x_2 = -3 \end{array}$$

Pošto je $a < 0$ i $D = 0 \rightarrow -x^2 - 6x - 9 \leq 0$ uvek, tj za $\forall x \in R$

Ovo vidimo i iz transformacije:

$$-x^2 - 6x - 9 - (x^2 - 6x - 9) = -(x+3)^2 \leq 0$$

Primer 2: Reši nejednačinu:

$$(x^2 - 4x - 5) \cdot (x^2 + 2x - 3) < 0$$

Rešenje: Ovo je složeniji oblik nejednačina, gde možemo upotrebiti i već poznat šablon:

$$A \cdot B < 0 \Leftrightarrow (A > 0, B < 0) \vee (A < 0, B > 0)$$

Naša preporuka je da ovakve zadatke rešavate pomoću tablice!!!
Najpre ćemo obe kvadratne jednačine rastaviti na činioce:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1, \text{ pa je } x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5) \\ x_2 = 5 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \text{ pa je } x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3) \\ x_2 = -3 \end{array}$$

Sada posmatramo nejednačinu:

$$(x+1)(x-5)(x-1)(x+3) < 0$$

Pravimo tablicu:

	$-\infty$				∞
$x+1$					
$x-5$					
$x-1$					
$x+3$					
$(x+1)(x-5)$ $(x-1)(x+3)$					

Dakle, svaki od izraza ide u tablicu, a u zadnjoj vrsti je "ono" što nam treba, tj. ceo izraz.

Brojevu pravu (gornja linija od $-\infty$ do ∞ ćemo podeliti na 5 intervala)

Iznad ovih vertikalnih linija ćemo upisati brojeve.(koje?)

To brojevi su rešenja kvadratnih jednačina, dakle -1,5,1 i -3 samo ih poredjamo od od najmanjeg do najvećeg:-3,-1,1,5

	$-\infty$	-3	-1	1	5	∞
$x+1$	-					
$x-5$	-					
$x-1$	-					
$x+3$	-					
$(x+1)(x-5)$ $(x-1)(x+3)$						

Dakle biramo bilo koju broj iz svakog od 5 intervala i zamenjujemo u izraze $x+1$, $x-5$, $x-1$ i $x+3$; ne zanima nas koji broj ispadne već samo njegov znak + ili - koji upisujemo u tablicu. Recimo, u intervalu $(-\infty, -3)$ izaberemo broj -10, pa ga menjamo redom:

$$x+1=-10-5=-9 \rightarrow \text{uzmemo } - \text{ (upisan u tablicu)}$$

$$x-5=-10-5=-15 \rightarrow - \text{ upišemo u tablicu}$$

$$x-1=-10-11=-11 \rightarrow + \text{ upišemo u tablicu}$$

$$x+3=-10+3=-7 \rightarrow - \text{ upišemo u tablicu}$$

Izmedju -3 i -1 izaberemo -2, itd... Dobili smo:

	$-\infty$	-3	-1	1	5	∞
$x+1$	-	-	+	+	+	
$x-5$	-	-	-	-	+	
$x-1$	-	-	-	+	+	
$x+3$	-	+	+	+	+	
$(x+1)(x-5)$ $(x-1)(x+3)$	+	-	+	-	+	

Onda sklopimo:

- 4 minusa daju +
- 3 minusa i plus daju -
- 2 minusa i 2 plusa daju +
- 3 plusa i 1 minus daju -
- 4 plusa daju +

na ovaj način mi smo rešili dve nejednačine:

$$(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) < 0$$

$$(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) > 0$$

Pošto je naš zadatak da rešimo prvu, $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) < 0$, biramo u konačnom rešenju gde su minusi:

$$x \in (-3, -1) \cup (1, 5)$$

Primer 3: Rešiti nejednačinu:

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{1 - x^2} > 0$$

Rešenje:

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$a = 1 \quad D = b^2 - 4ac$$

$$b = -3 \quad D = 9 - 16$$

$$c = 4 \quad D = -7$$

PAZI: pošto je $a > 0$ i $D < 0$ onda je $x^2 - 3x + 4 > 0$ za $\forall x$!!!

Dakle, mora biti $1 - x^2 > 0$

Posmatrajmo kvadratnu jednačinu:

$$1 - x^2 = 0 \quad a = -1 \quad D = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 \quad x_{1,2} = \frac{0 \pm 2}{-2}$$

$$b = 0 \quad D = 4 \quad x_1 = -1$$

$$c = 1 \quad x_2 = 1$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & - & & + & & - \\ & -\infty & & -1 & & 1 & & \infty \end{array}$$

Zaključujemo $x \in (-1, 1)$

Primer 4: Za koje realne vrednosti x razlomak $\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1}$ manji od -1 ?

$$\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} < -1 \quad \text{PAZI: Moramo prebaciti } -1 \text{ na levu stranu i to "srediti"}$$

$$\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} + 1 < 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x - 5 + 2x^2 - x - 1}{2x^2 - x - 1} < 0$$

$$\frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 1} < 0$$

Sad tek idemo "klasično"

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

$$x_2 = -3$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = (x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

Sada rešavamo: $\frac{(x-2)(x+3)}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)} < 0$

	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	1	2	∞
$x-2$		-	-	-	-	+
$x+3$		-	+	+	+	+
$x-1$		-	-	-	+	+
$x + \frac{1}{2}$		-	-	+	+	+
$\frac{(x-2)(x+3)}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)} < 0$		+	-	+	-	+

Rešenje: $x \in \left(-3, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$

Primer 5: Data je funkcija $y = (r^2 - 1)x^2 + 2(r - 1)x + 2$. Odrediti realan parameter r tako da funkcija bude pozitivna za svako realno x

$$y = (r^2 - 1)x^2 + 2(r - 1)x + 2$$

$$(r^2 - 1)x^2 + 2(r - 1)x + 2 > 0$$

Da bi funkcija bila pozitivna mora da je:

$$a > 0 \text{ i } D < 0$$

$$\begin{aligned} a &= r^2 - 1 & D &= b^2 - 4ac \\ b &= 2(r - 1) & D &= [2(r - 1)]^2 - 4(r^2 - 1) \cdot 2 \\ c &= 2 & D &= 4(r - 1)^2 - 8(r^2 - 1) \\ & & D &= 4(r^2 - 2r + 1) - 8r^2 + 8 \\ & & D &= 4r^2 - 8r + 4 - 8r^2 + 8 \\ & & D &= -4r^2 - 8r + 12 \end{aligned}$$

$$-4r^2 - 8r + 12 < 0 / : (-4)$$

$$r^2 + 2r - 3 > 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = -3$$

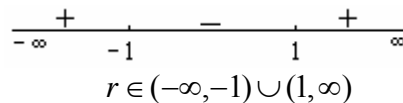
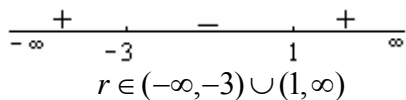
$$a > 0$$

$$r^2 - 1 > 0$$

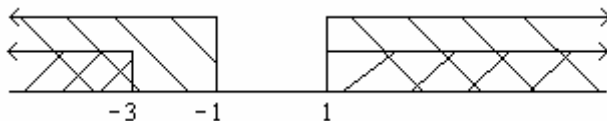
$$r^2 - 1 = 0$$

$$r_1 = -1$$

$$r_2 = 1$$



Upakujmo sad ova dva rešenja:



$r \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ Konačno rešenje

Primer 6: Odrediti sve realne vrednosti parametra r za koje je funkcija $y = rx^2 + 2(r+2)x + 2r + 4$ negativna za svako realno x .

$$rx^2 + 2(r+2)x + 2r + 4 < 0$$

da bi funkcija bila negativna mora da važi: $a < 0$ i $D < 0$

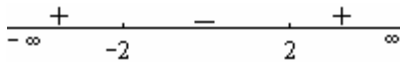
$$\begin{aligned} a &= r & D &= b^2 - 4ac \\ b &= 2(r+2) & D &= [2(r+2)]^2 - 4 \cdot r(2r+4) \\ c &= 2r+4 & D &= 4(r+2)^2 - 4r(2r+4) \\ & & D &= 4(r^2 + 4r + 4) - 8r^2 - 16r \\ & & D &= 4r^2 + 16r + 16 - 8r - 16r \\ & & D &= -4r^2 + 16 \end{aligned}$$

$$-4r^2 + 16 < 0 / : (-4)$$

$$r^2 - 4 > 0 \quad a < 0$$

$$r_1 = 2 \quad r < 0$$

$$r_2 = -2$$



$$r \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

Upakujmo rešenja:



$$r \in (-\infty, -2) \text{ konačno rešenje}$$

Primer 7: Odrediti k tako da je za svako x ispunjava nejednakost

$$\left| \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 2$$

$$\left| \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 2 \Rightarrow -2 < \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} < 2$$

Dakle, ovaj zadatak zahteva rešavanje dve nejednačine:

1) Rešimo

$$\begin{aligned}
 -2 &< \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} \\
 \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} + 2 &> 0 \\
 \frac{x^2 + kx + 1 + 2x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1} &> 0 \\
 \frac{3x^2 + x(k + 2) + 3}{x^2 + x + 1} &> 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + x + 1 &= 0 \\
 a = 1 & \quad D = b^2 - 4ac \\
 b = 1 & \quad D = 1 - 4 \\
 c = 1 & \quad D = -3
 \end{aligned}$$

Kako je $a > 0$ i $D < 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0$ za $\forall x$ pa ne utiče na razmatranje!!!

$$3x^2 + x(k + 2) + 3 = 0, \quad \text{da bi } 3x^2 + x(k + 2) + 3 > 0 \text{ mora biti } a > 0, D < 0$$

$$\begin{aligned}
 a = 3 & \quad D = (k + 2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 \\
 b = k + 2 & \quad D = k^2 + 4k + 4 - 36 \\
 c = 3 & \quad D = k^2 + 4k - 32
 \end{aligned}$$

$$k^2 + 4k - 32 < 0$$

$$k^2 + 4k - 32 = 0$$

$$k_1 = 4$$

$$k_2 = -8$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & + & & - & & + & \\
 -\infty & & -8 & & 4 & & \infty \\
 & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & & \\
 & & k \in (-8, 4) & & & &
 \end{array}$$

2) Rešavamo:

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} < 2 &\Rightarrow \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} - 2 < 0 \\
 \frac{x^2 + kx + 1 - 2x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1} &< 0 \\
 \frac{-x^2 + (k - 2)x - 1}{x^2 + x + 1} &< 0
 \end{aligned}$$

Kako je $x^2 + x + 1 > 0$, to mora biti:

$$-x^2 + (k-2)x - 1 > 0 / (-1)$$

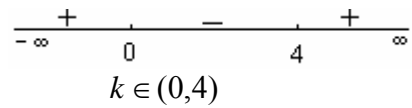
$$x^2 - (k-2)x + 1$$

$$D < 0 \Rightarrow D = [-(k-2)]^2 - 4$$

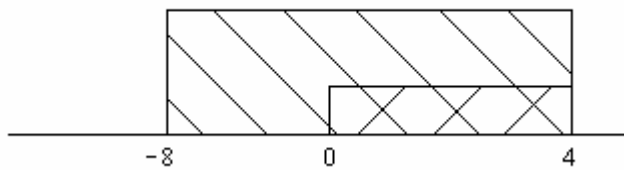
$$D = k^2 - 4k + 4 - 4$$

$$D = k^2 - 4k < 0$$

$$k^2 - 4k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 4$$



Upakujemo oba rešenja:



Dakle, konačno rešenje je: $k \in (0, 4)$