

KVADRATNA JEDNAČINA $ax^2 + bx + c = 0$

Jednačina oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gde je x – nepoznata. a, b i c realni brojevi, $a \neq 0$, je kvadratna jednačina po x sa koeficijentima a, b i c .

Kvadratna jednačina je **potpuna** ako su koeficijenti $b \neq 0$ i $c \neq 0$. Ako je $b = 0$ ili $c = 0$ (ili oba) onda je kvadratna jednačina **nepotpuna**.

Nepotpuna kvadratne jednačine se rešavaju relativno lako.

Nepotpune kvadratne jednačine

$$ax^2 + bx = 0$$

$$\begin{aligned} x(ax+b) &= 0 \\ x=0 \quad \vee \quad ax+b &= 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$ax^2 = 0$$

$$x = 0$$

Primeri:

$$2x^2 + 5x = 0$$

$$x(2x+5) = 0$$

$$x=0 \quad \vee \quad 2x+5=0$$

$$2x = -5$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$4x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x = \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$5x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{5}$$

$$x = 0$$

$$x_1 = x_2 = 0$$

Potpuna kvadratna jednačina:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Kvadratna jednačina ima dva rešenja: označavamo ih sa x_1 i x_2 . Tradicionalno se piše

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Primer 1)

a) $6x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

v) $x^2 - 4x + 5 = 0$

a) $6x^2 - x - 2 = 0$

$a = 6$ **Pazi**, kad nema broj ispred nepoznate uzimaš 1.

$b = -1$

$c = -2$

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6}$$

$$X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$$X_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$X_2 = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1$

$b = -2$

$c = 1$

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$X_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$X_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$X_2 = \frac{2}{2} = 1$$

v) $x^2 - 4x + 5 = 0$

$a = 1$

$b = -4$

$c = 5$

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 20}}{2 \cdot 1}$$

$$X_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \frac{2(2 \pm i)}{2} = 2 \pm i$$

Dakle: $X_1 = 2 + i$

$X_2 = 2 - i$

Pazi jer je $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2i$
 $\sqrt{-1} = i$

dakle: $x_1 = 2 + i$ $x_2 = 2 - i$

Primer 2) Rešiti jednačinu:

$$(2x - 3)^2 + (x - 1)(x + 2) = 2 - 11x$$

Rešenje: $(2x - 3)^2 + (x - 1)(x + 2) = 2 - 11x$

$$4x^2 - 12x + 9 + x^2 + 2x - x - 2 - 2 + 11x = 0$$

$$5x^2 + 5 = 0 / : 5$$

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{Nepotpuna kvadratna jednačina}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x_1 = +i$$

$$x_2 = -i$$

Primer 3) Rešiti jednačinu:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{8}{x^2-4} \rightarrow \text{najpre rastavimo na činioce imenilac}$$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{8}{(x-2)(x+2)} \rightarrow \text{Množimo sve sa NZS} = (x-2)(x+2) \text{ uz uslov:}$$

$$x(x+2) - 3(x-2) = 8 \quad x \neq 2 \quad \text{i} \quad x \neq -2$$

$$x^2 + 2x - 3x + 6 - 8 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \text{Sad radimo kao kvadratnu jednačinu}$$

$$a = 1 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2}$$

$$b = -1 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \text{PAZI: nije rešenje jer } x \neq 2$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow \text{Dakle } x = -1$$

Primer 4) Grupa dečaka treba da подели 400 klikera na jednake delove. Pre deobe 4 dečaka se odreknu svog dela, zbog čega je svaki od ostalih dobio po 5 klikera više. Koliko je u toj grupi bilo dečaka?

Obeležimo sa X-broj dečaka, Y- broj klikera po dečaku

$$x \cdot y = 400$$

$$(x-4) \cdot (y+5) = 400 \rightarrow \text{Sredimo ovo}$$

$$xy + 5x - 4y - 20 = 400$$

$$400 + 5x - 4y - 20 = 400$$

$$5x - 4y - 20 = 0 \rightarrow \text{Iz prve jednačine izrazimo } y = \frac{400}{x}$$

$$5x - 4 \cdot \frac{400}{x} - 20 = 0 / \cdot x$$

$$5x^2 - 1600 - 20x = 0 \rightarrow \text{(poredjamo)}$$

$$5x^2 - 20x - 1600 = 0 \rightarrow \text{(podelimo sa 5)}$$

$$x^2 - 4x - 320 = 0 \rightarrow \text{sad radimo kvadratnu jednačinu}$$

$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = -320$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-320)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 1280}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{1296}}{2} = \frac{4 \pm 36}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 36}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{4 - 36}{2} = -16 \rightarrow \text{Nemoguće}$$

Dakle bilo je 20 dečaka u grupi

Priroda rešenja kvadratne jednačine

Diskriminanta (**D**) kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ je izraz $b^2 - 4ac$ (ono pod korenom) Dakle: $D = b^2 - 4ac$

Sada formulu za rešavanje možemo zapisati i kao: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Za kvadratnu jednačinu $ax^2 + bx + c$ sa realnim koeficijentima važi:

1) Jednačina ima dva različita realna rešenja ako i smo ako je $D > 0$

($x_1 = x_2 \in R$ $x_1 \neq x_2$ akko $D > 0$)

2) Jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje ako i samo ako je $D = 0$

($x_1 = x_2 \in R$ akko $D = 0$)

3) Jednačina ima jedan par konjugovano kompleksnih rešenja akko je $D < 0$

$$(x_1 = a + bi, x_2 = a - bi \text{ akko } D < 0)$$

Primer 1) Ispitati prirodu rešenja kvadratnih jednačina u zavisnost od parametara:

a) $x^2 + 3x + m = 0$

b) $(n+3)x^2 - 2(n+1)x + n - 5 = 0$

a) $x^2 + 3x + m = 0 \Rightarrow a = 1$
 $b = 3$
 $c = m$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 9 - 4m$$

1) $D > 0 \Rightarrow 9 - 4m > 0$
 $-4m > -9 \rightarrow$ **PAZI:** Okreće se znak
 $m < \frac{-9}{-4}$
 $m < \frac{9}{4}$

2) $D = 0 \Rightarrow 9 - 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{4}$

3) $D < 0 \Rightarrow 9 - 4m < 0 \Rightarrow m > \frac{9}{4}$

Dakle: - za $m < \frac{9}{4}$ rešenja su realna i različita

- za $m = \frac{9}{4}$ rešenja su realna i jednaka

- za $m > \frac{9}{4}$ rešenja su konjugovano-kompleksni brojevi

b) $(n+3)x^2 - 2(n+1)x + n - 5 = 0$

$a = n + 3$

$b = -2(n+1) \Rightarrow$ **PAZI:** ovde je odmah $n+3 \neq 0$ da bi jednačina bila kvadratna

$c = n - 5$

$$\begin{aligned}D &= b^2 - 4ac = [-2(n+1)]^2 - 4(n+3)(n-5) \\&= 4(n^2 + 2n + 1) - 4(n^2 - 5n + 3n - 15) \\&= 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 + 20n - 12n + 60 \\D &= 16n + 64\end{aligned}$$

1) $D > 0$ $16n + 64 > 0 \Rightarrow 16n > -64 \Rightarrow n > -4, n > -4$ $x_1 \neq x_2 \in R$

2) $D = 0$ $16n + 64 = 0 \Rightarrow n = -4$ $x_1 = x_2 \in R$

3) $D < 0$ $16n + 64 < 0 \Rightarrow n < -4$ x_1 i x_2 su konjugovano-kompleksni brojevi.

Primer 2) Za koje vrednosti parametra $k \in R$ jednačina $kx^2 + (k+1)x + 2 = 0$ ima dvostruko rešenje?

Rešenje: Ovde nam treba da je $D = 0$ i naravno $a \neq 0$, jer ako je $a = 0$ jednačina nije kvadratna.

$$\begin{aligned}kx^2 + (k+1)x + 2 = 0 &\Rightarrow a = k \\b = k+1 &\Rightarrow k \neq 0 \\c = 2\end{aligned}$$

$$D = b^2 - 4ac = (k+1)^2 - 4 \cdot k \cdot 2 = k^2 + 2k + 1 - 8k = k^2 - 6k + 1$$

$$D = k^2 - 6k + 1 = 0$$

Sada rešavamo novu kvadratnu jednačinu ‘po k’

$$\begin{aligned}k^2 - 6k + 1 = 0 &\Rightarrow a = 1 \\b = -6 \\c = 1\end{aligned}$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Pa je:

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \frac{2(3 \pm 2\sqrt{2})}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$k_1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

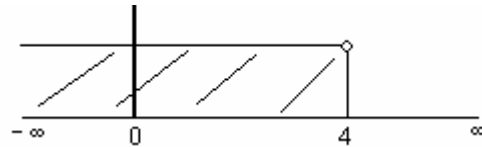
$$k_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

Ovo su rešenja za koja jednačina (početna) ima dvostruko rešenje!!!

Primer 3) Za koje vrednosti parametra $m \in R$ jednačina $mx^2 - 4x + 1$ ima realna i različita rešenja?

Rešenje: Ovde dakle mora biti $D > 0$ i naravno $a \neq 0$

$$\begin{aligned} a = m &\Rightarrow m \neq 0 & D = b^2 - 4ac \\ b = -4 &\Rightarrow & D = (-4)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 \\ c = 1 && D = 64 - 4m > 0 \\ && 16 - 4m > 0 \\ && -4m > -16 \\ && m < 4 \end{aligned}$$



Ne sme!!!

Dakle, rešenje je $m \in (-\infty, 0) \cup (0, 4)$

Primer 4) Za koje vrednosti parametra m jednačina $x^2 - 8x + m$ ima konjugovano-kompleksno rešenja?

Rešenje: Mora biti $D < 0$ i $a \neq 0$

$$\begin{aligned} a = 1 &\neq 0 & D = b^2 - 4ac \\ b = -8 &\Rightarrow & D = (-8)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 \\ c = m && D = 64 - 4m < 0 \\ && -4m < -64 \\ && m > 16 \Rightarrow m \in (16, \infty) \end{aligned}$$

Primer 5) Za koje vrednosti parametra $k \in R$ jednačina $kx^2 + 6x + 3 = 0$ nema realna rešenja

Rešenje: Kad nema realna rešenja, znači da su konjugovano kompleksna, odnosno $D < 0$ i naravno $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} kx^2 + 6x + 3 = 0 &\Rightarrow a = k \Rightarrow k \neq 0 \\ &b = 6 \\ &c = 3 \end{aligned}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot k \cdot 3 = 36 - 12k$$

$$36 - 12k < 0$$

$$-12k < -36$$

$$k > 3 \Rightarrow k \in (3, \infty)$$

Primer 6) Za koje vrednosti parametra $m \in R$ jednačina $(2m+1)x^2 - (2m+1)x + 2,5 = 0$ ima realna i različita rešenja?

Rešenje: Ovde je $D > 0$ a $a \neq 0$

$$a = 2m + 1$$

$$b = -(2m + 1)$$

$$c = -2,5$$

$$a \neq 0 \Rightarrow 2m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -\frac{1}{2}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = [-(2m+1)]^2 - 4 \cdot [2m+1] \cdot 2,5$$

$$D = (2m+1)^2 - 10(2m+1)$$

$$D = 4m^2 + 4m + 1 - 20 - 10$$

$$D = 4m^2 - 16m - 9 > 0$$

Rešimo najpre $4m^2 - 16m - 9 = 0$

$$a = 4$$

$$b = -16$$

$$c = -9$$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 144}}{8} = \frac{16 \pm 10}{8}$$

$$m_1 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

$$m_2 = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

(Pogledaj kvadratne nejednačine):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & + & & - & & + & \\
 \hline
 -\infty & & -\frac{1}{2} & & \frac{9}{2} & & \infty
 \end{array}$$

$D > 0 \rightarrow$ biramo gde je +

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, \infty\right)$$