KVADRATNA FUNKCIJA

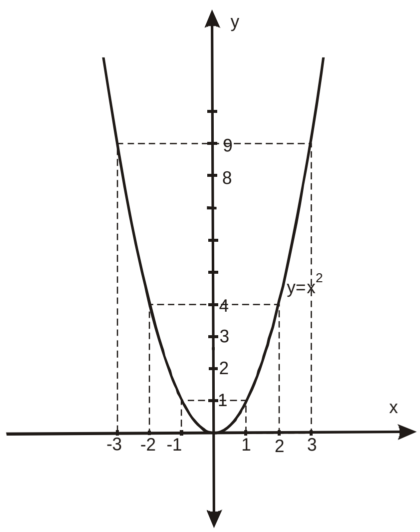
Kvadratna funkcija je oblika:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Gde je $x \in R,\ \ a \neq 0$ i $a, b\ i\ c$ su realni brojevi.
Kriva u ravni koja predstavlja grafik funkcije $y = ax^2 + bx + c$ je **parabola**.

Najpre ćemo naučiti kako izgleda grafik funkcije $y = x^2$. Napravićemo tablicu za neke vrednosti promenljive X.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9



Za $x = -3$
$y = (-3)^2 = 9$

Za $x = -2$
$y = (-2)^2 = 4$

Za $x = -1$
$y = (-1)^2 = 1$

Za $x = 0$
$y = 0^2 = 0$

Za $x = 1$

$y = 1^2 = 1$

Za $x = 2$ Za $x = 3$

$y = 2^2 = 4$, $y = 3^2 = 9$

Ovaj grafik će nam uvek služiti kao ‘’početni”. Šta se dešava ako ispred x^2 ima neki broj?

Naučimo sad grafik $y = ax^2$

Razlikovaćemo 2 situacije: $a > 0$ i $a < 0$

za $a > 0$

Ovde je parabola okrenuta ‘’ otvorom nagore’’. Šta se dešava ako je $a > 1$ i $0 < a < 1$?

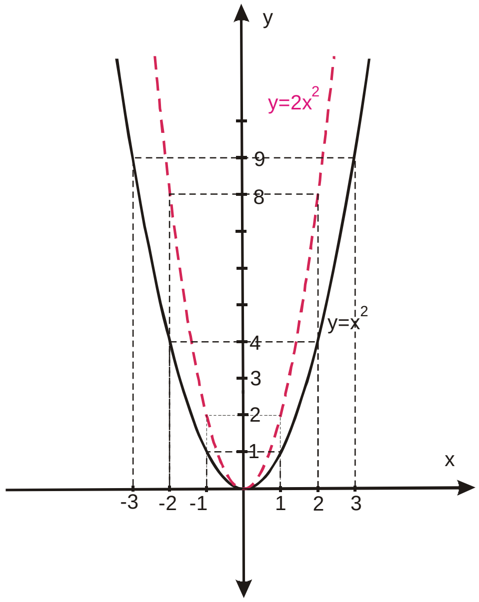
$a > 1$

U odnosu na početni grafik $y = x^2$, ovaj grafik $y = ax^2$ se ‘’sužava’’

Primer

$y = 2x^2$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	18	8	2	0	2	8	18



Što je broj a veći to je grafik uži!!!

$0 < a < 1$

U odnosu na početni grafik $y = x^2$, ovaj grafik $y = ax^2$ se ''širi''

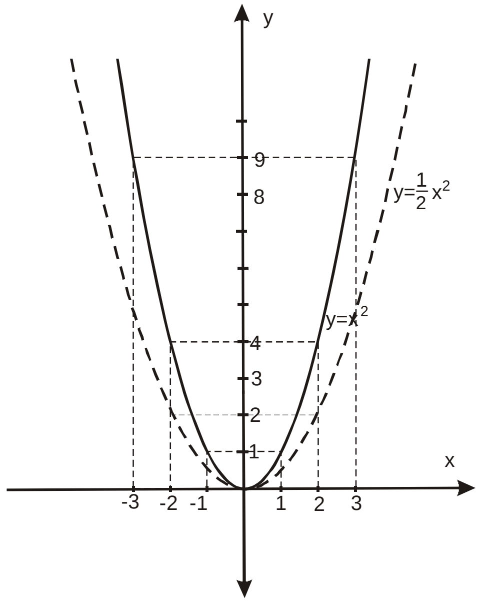
Primer

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$

Primer

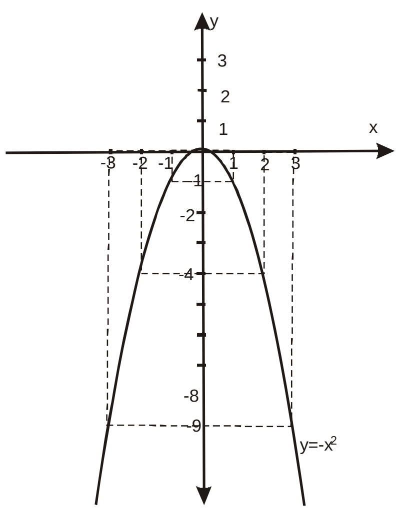
$$y = \frac{1}{2}x^2$$



Što je broj a bliži nuli, grafik je širi!!!

Za $a < 0$ **Ovde je parabola okrenuta ''otvorom nadole''**.
Početni grafik je $y = -x^2$. On izgleda.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18



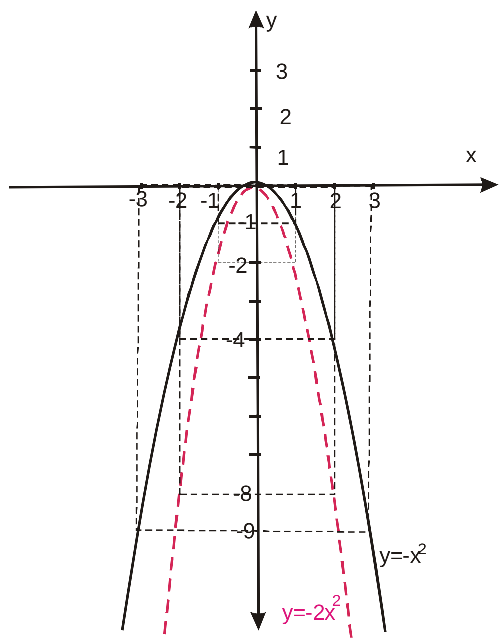
Opet ćemo razmotriti 2 situacije:

U odnosu na početni grafik $y = ax^2$ se ‘’sužava’’ako je a<-1

<u>Primer</u>

$y = -2x^2$

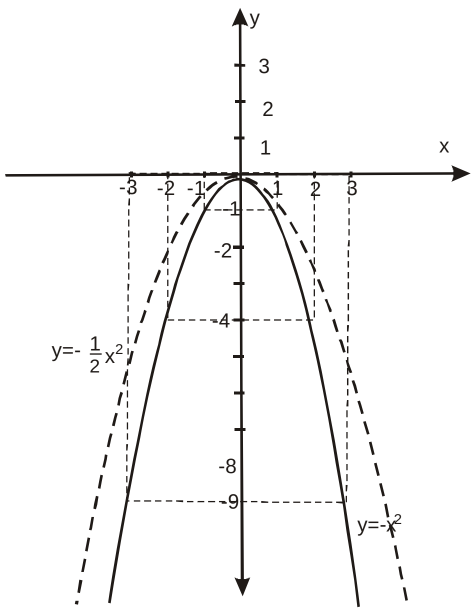
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18



$-1 < a < 0$

U odnosu na početni grafik $y = -x^2$ grafik $y = ax^2$ se ‘’širi’’

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$



Dobro, ovo za sad nije bilo "mnogo opasno" Naučimo sada da pomeramo finkciju duž y-ose. Posmatrajmo grafik:

$$y = ax^2 + \beta$$

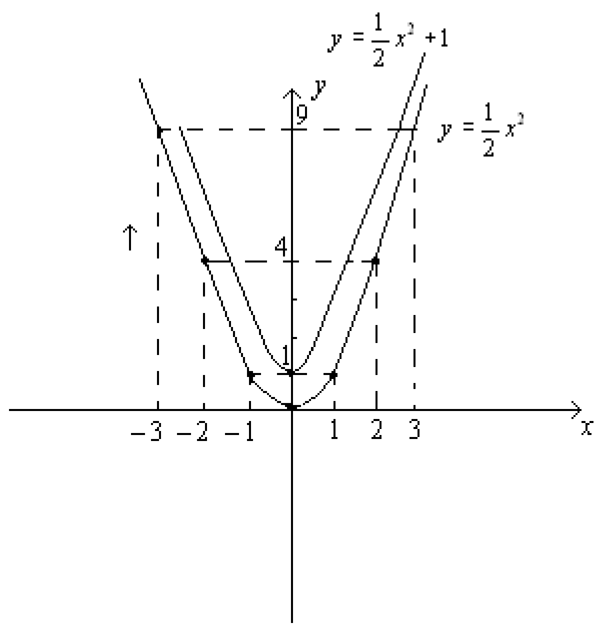
→ Prvo nacrtamo grafik funkcije $y = ax^2$

→ taj grafik pomeramo duž y-ose i to:

1) Ako je β pozitivan ''podižemo'' grafik, odnosno pomeramo ga u pozitivnom smeru y-ose.
2) Ako je β negativan, ''spuštamo'' grafik, odnosno pomeramo ga u negativnom smeru y-ose

Evo par primera:

Primer 1: $y=\frac{1}{2}x^2+1$

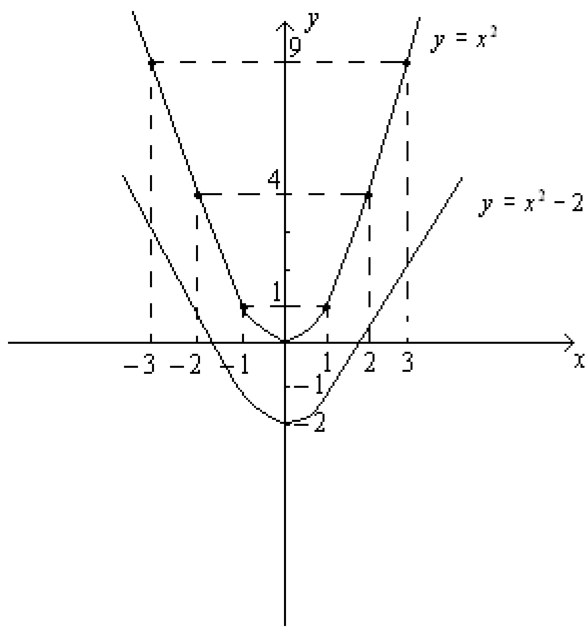


Prvo nacrtamo grafik $y=\frac{1}{2}x^2$, Zatim taj grafik ''podignemo'' za +1, paralelnim pomeranjem (translacija)

Primer 2:

$$y=x^2-2$$

Znači, najpre nacrtamo grafik $y=x^2$. Potom taj grafik ''spustimo'' za -2 duž y-ose (transplatorno pomeranje)



Nadam se da smo i ovo razumeli, jel tek sad ide "prava stvar". Naučimo da pomeramo funkciju i duž X-ose.

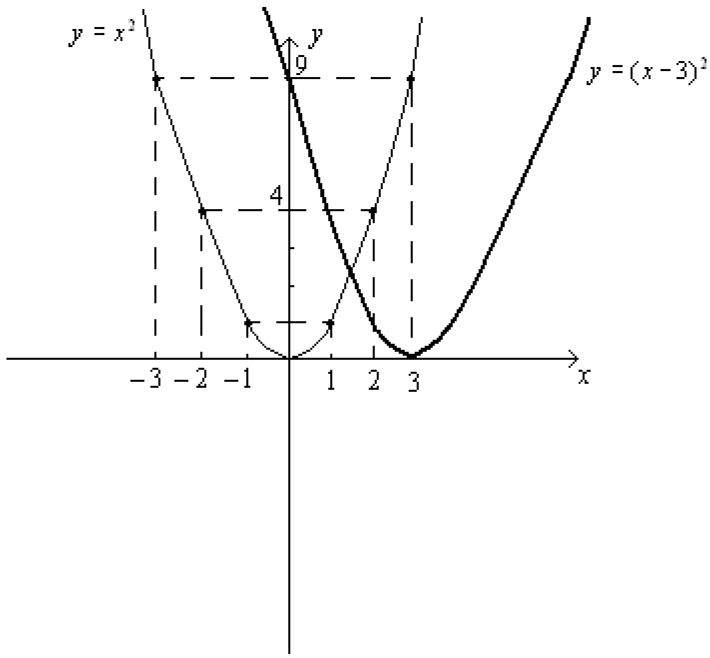
Posmatrajmo funkciju: $y=(x-\alpha)^2$

Pazi:

→ Ako je –α to znači da funkciju pomeramo za α po x-osi **Udesno**.
→ Ako je +α to znači da finkciju pomeramo za α po x-osi **Ulevo**

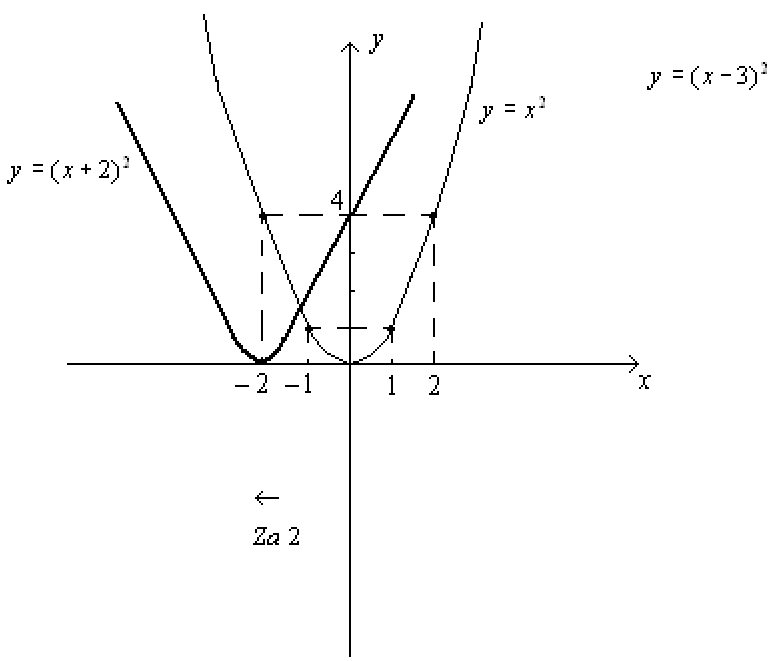
Ništa bez primera:

Primer 1: $y=(x-3)^2$
→ Znači pomeramo funkciju $y=x^2$ ulevo za 3



Primer 2: $y = (x+2)^2$

→ Znači pomerimo funkciju $y = x^2$ ulevo za -2



Sada imamo znanje da nacrtamo ceo grafik funkcije $y = ax^2 + bx + c$.

Najpre moramo funkciju $y = ax^2 + bx + c$ svesti na takozvani kanonski oblik. Tu nam pomaže formula:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ili ovako uvedemo da je:

$\alpha = -\frac{b}{2a}$ i $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$ tj. $\beta = -\frac{D}{4a}$ dobijamo: $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ kanonski oblik
Tačka $T(\alpha, \beta)$ je teme parabole.

<u>Dakle: (važno ovo je postupak)</u>

→ Datu funkciju $y = ax^2 + bx + c$ najpre svedemo na kanonski oblik $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$
→ Nacrtamo grafik funkcije $y = ax^2$
→ Izvršimo pomeranje (translarne) duž x–ose za α
→ Izvršimo pomeranje (transliranje) duž y-ose za β

<u>Primer 1:</u> Nacrtaj grafik funkcije:

$$y = x^2 - 6x + 5$$

→ Svedemo je na kanonski oblik:

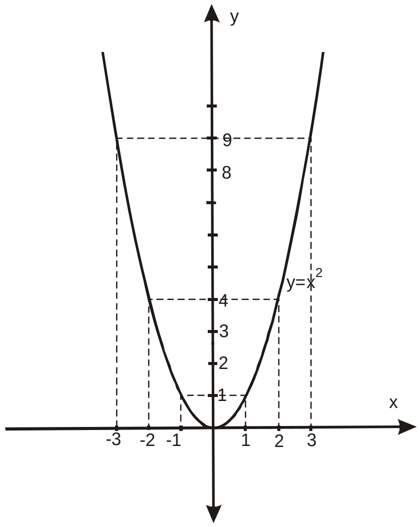
$a = 1$
$b = -6$
$c = 5$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$$

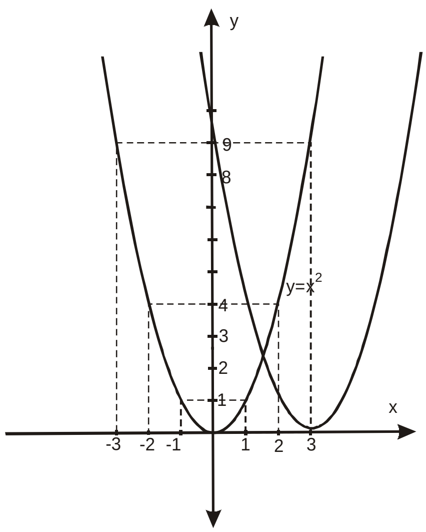
$$\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-6)^2}{4 \cdot 1} = \frac{20 - 36}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

$$y = a(x-\alpha)^2 + \beta$$
$$y = 1(x-3)^2 + (-4)$$
$$y = (x-3)^2 - 4$$

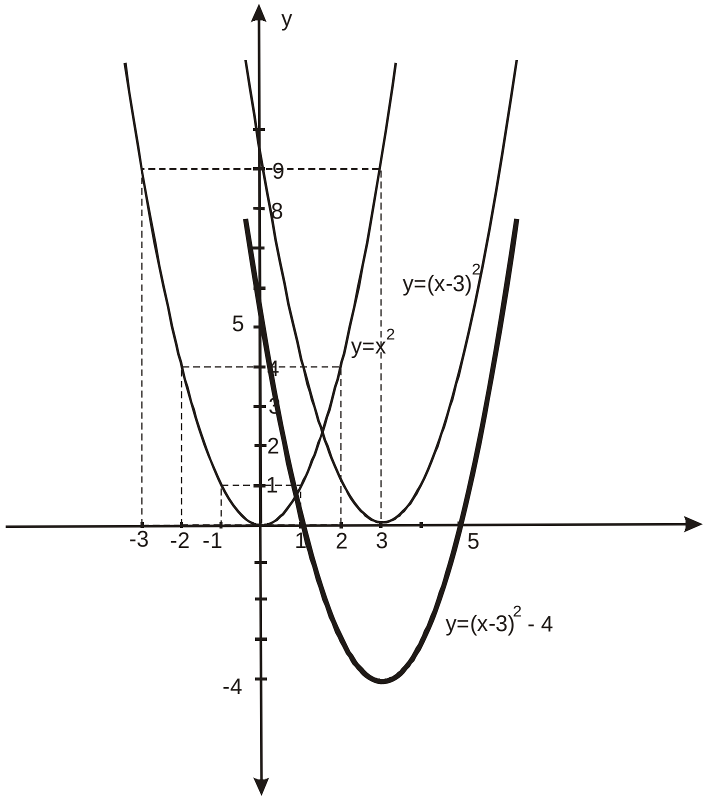
→ Najpre nacrtamo $y = ax^2$, odnosno $y = x^2$



→ Sada ucrtamo grafik $y=(x-3)^2$, odnosno vršimo pomeranje za 3 ulevo



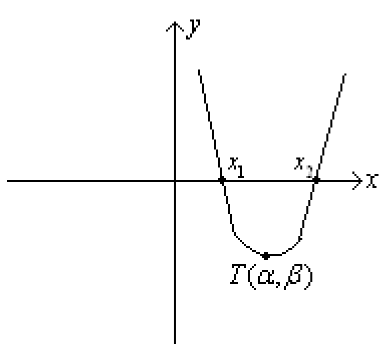
→ I najzad ucrtamo $y=(x-3)^2-4$ tako što grafik $y=(x-3)^2$ spustimo za 4 ''nadole''



Ceo ovaj postupak je dosta ‘’zamršen’’ a nije baš ni mnogo precizan. Evo kako ćete mnogo brže i preciznije nacrtati grafik $y = ax^2 + bx + c$ bez svodjenja na kanonski oblik i ‘’pomeranja’’:

Naš grafik će u zavisnosti od a (broja uz x^2) i diskriminante $D = b^2 - 4ac$ biti jedan od sledećih 6 grafika:

1) $a > 0, D > 0$



$\rightarrow$ F-ja seče X-osu u $x_1\, i\, x_2$

$\rightarrow$ $y < 0$ za $x \in (x_1,\ x_2)$

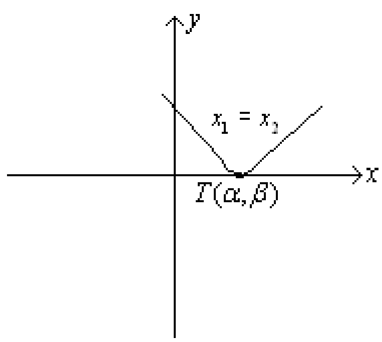
$y > 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

$\rightarrow$ F-ja ima minimum u temenu $T(\alpha, \beta)$

$\rightarrow$ F-ja raste za $x \in (\alpha, \infty)$

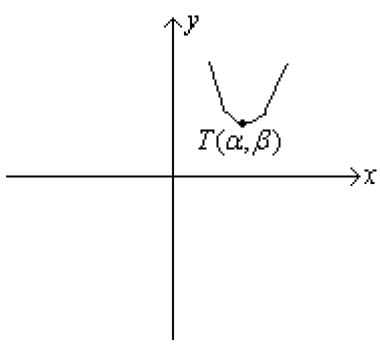
$\rightarrow$ F-ja opada za $x \in (-\infty, \alpha)$

2) $a > 0, D = 0$



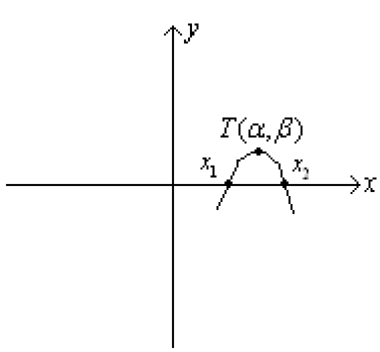
→ F-ja je definisana za $\forall x \in R$
→ F-ja seče x-osu u $x_1 = x_2$
→ $y \geq 0, \forall x \in R$
→ F-ja ima minimum u $T(\alpha, 0)$
→ F-ja raste za $x \in (\alpha, \infty)$
→ F-ja opada za $x \in (-\infty, \alpha)$

3) $a > 0, D < 0$



→ F-ja je definisana za $\forall x \in R$
→ F-ja ne seče X- osu ($x_{1,2}$ su konjugovano -kompleksni brojevi.
→ $y > 0,\ za\ \forall x \in R$
→ F-ja ima minimum u $T(\alpha, \beta)$
→ F-ja raste za $x \in (\alpha, \infty)$
→ F-ja opada za $x \in (-\infty, \alpha)$

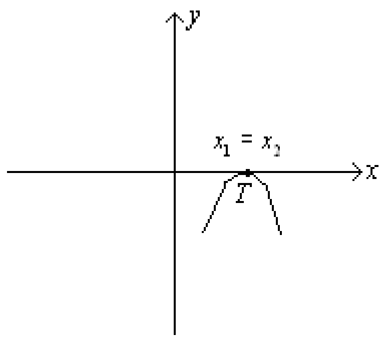
4) $a < 0, D > 0$



→ F-ja je definisana $\forall x \in R$
→ F-ja seče X- osu u x_1, x_2
→ $y < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$
$y > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$
→ F-ja ima minimum u $T(\alpha, \beta)$
→ F-ja raste za $x \in (\alpha, \infty)$

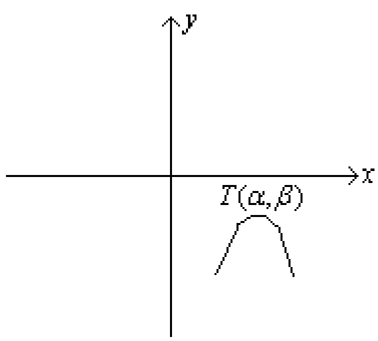
→ F-ja opada za $x \in (-\infty, \alpha)$

5) $a < 0, D = 0$



→ F-ja je definisana $\forall x \in R$
→ F-ja seče X- osu u $x_1 = x_2$
→ $y \leq 0, \forall x \in R$
→ F-ja ima minimum u $T(\alpha, 0)$
→ F-ja raste za $x \in (-\infty, \alpha)$
→ F-ja opada za $x \in (\alpha, \infty)$

6) $a < 0, D < 0$



→ F-ja je definisana $\forall x \in R$
→ F-ja ne seče X- osu ($x_{1,2}$ su konjugovano -kompleksni brojevi)
→ $y < 0,\ za\ \forall x \in R$
→ F-ja ima maximum u $T(\alpha, \beta)$
→ F-ja raste za $x \in (-\infty, \alpha)$
→ F-ja opada za $x \in (\alpha, \infty)$

<u>**Postupak**</u>

1) Najpre odredimo a,b,c i nadjemo diskriminantu $D = b^2 - 4ac$
2) Tražimo $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (ako ima)

$D > 0, x_1 \neq x_2$

$D = 0, x_1 = x_2$

$D < 0, Ne\,\text{ma}\, x_1, x_2$

3) U zavisnost od znaka broja a zaključujemo da li je parabola okrenuta otvorom nagore ili na dole, tj:

   $D > 0 \rightarrow$ Smeje se 

   $D < 0 \rightarrow$ Mršti se 

4) Parabola uvek seče y-osu u broju c
5) Nadjemo teme $T(\alpha, \beta)$ $\alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = -\frac{D}{4a}$

   $T(\alpha, \beta)$ je max ako je $a < 0$
   $T(\alpha, \beta)$ je min ako je $a > 0$

6) Konstruišemo grafik

<u>Primer 1:</u> Nacrtaj grafik funkcije

$$y = x^2 - 6x + 5$$

(ovo je ista funkcija koju smo crtali svodjenjem na kanonski oblik i pomerili duž x i y ose, pa da vidimo koji će nam postupak biti jasniji)

1)

$$a = 1 \qquad D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$
$$b = -6$$
$$c = 5$$

2)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 4}{2}$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 1$$

3)

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ okrenuta otvorom na gore (smeje se)

4)

y-osu seče u c=5

5)

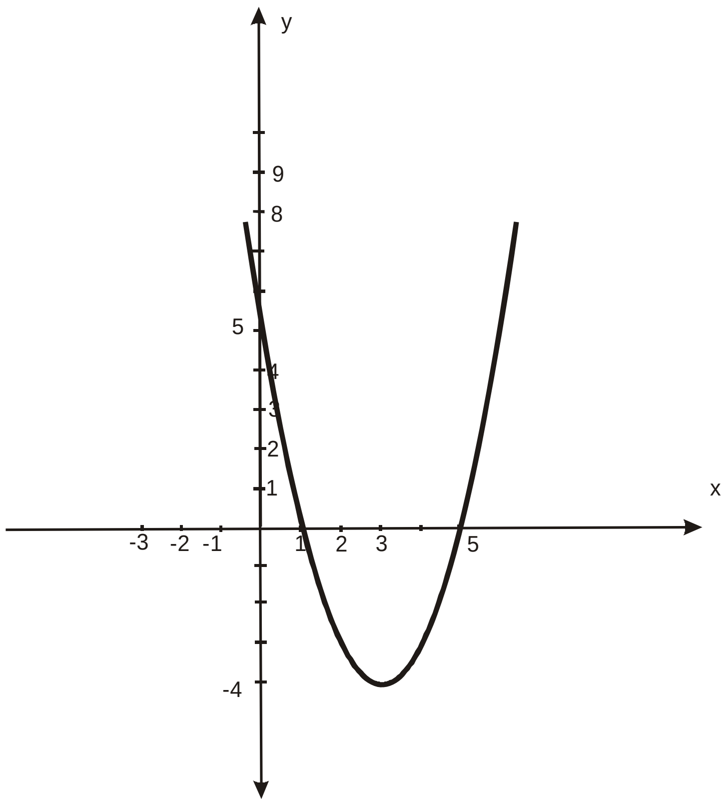
$$T(\alpha,\beta)$$

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{-6}{2\cdot 1}=3$$

$$\beta=-\frac{D}{4a}=-\frac{16}{4\cdot 1}=-4$$

$$\underbrace{T(3,-4)}_{\min}$$

<u>6) Grafik:</u>



sami odlučite koji način konstrukcije grafika vam je ‘’lakši’’

<u>Primer 2:</u> Nacrtati grafik finkcije

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6$$

1)

$$a=-\frac{1}{2}$$

$$b=\frac{1}{2}$$

$$c=6$$

$$D=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 6=-\frac{1}{4}+12=12\frac{1}{4}=\frac{49}{4}$$

2)

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}}{-1}$$

$$x_1=-3$$

$$x_2=4$$

3)

$a=-\frac{1}{2}<0\Rightarrow$ okrenuta otvorom na dole (mršti se)

4)

presek sa y-osom je c=6

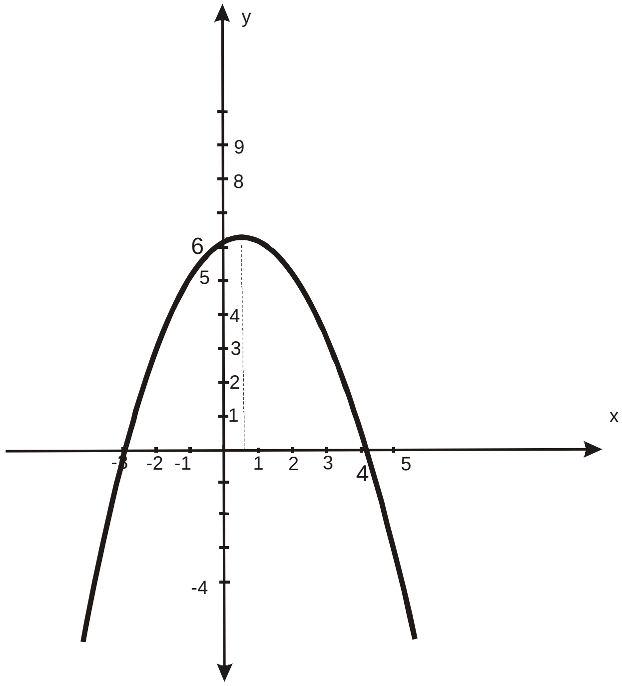
5)

$$T(\alpha,\beta)$$

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\beta=-\frac{D}{4a}=-\frac{\frac{49}{4}}{4\left(-\frac{1}{2}\right)}=+\frac{49}{8}=6\frac{1}{8}$$

$$T\left(\frac{1}{2},6\frac{1}{8}\right)$$



Primer 3: Skicirati grafik funkcije:

$$y = x^2 - 4|x| + 3$$

Prešnje: Pošto $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$, odavde ćemo morati 2 grafika, jedna za $x \geq 0$ i jedan za $x < 0$.

$$y = x^2 - 4|x| + 3$$

za $x \geq 0$

$$y = x^2 - 4x + 3$$

1)

$$a = 1, b = -4, c = 3$$
$$D = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$$

2)

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$

$x_1 = 3$

$x_2 = 1$

3)

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ smeje se

4)

presek sa y-osom je u 3

5)

$T(\alpha, \beta)$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$

$\beta = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$

$T(2,-1)$

$$y = x^2 - 4|x| + 3$$

za $x < 0$

$y = x^2 + 4x + 3$

1)

$a = 1, b = 4, c = 3$

$D = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$

2)

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$

$x_1 = -1$

$x_2 = -3$

3)

$a = 1 > \Rightarrow$ smeje se

4)

presek sa –osom je u 3

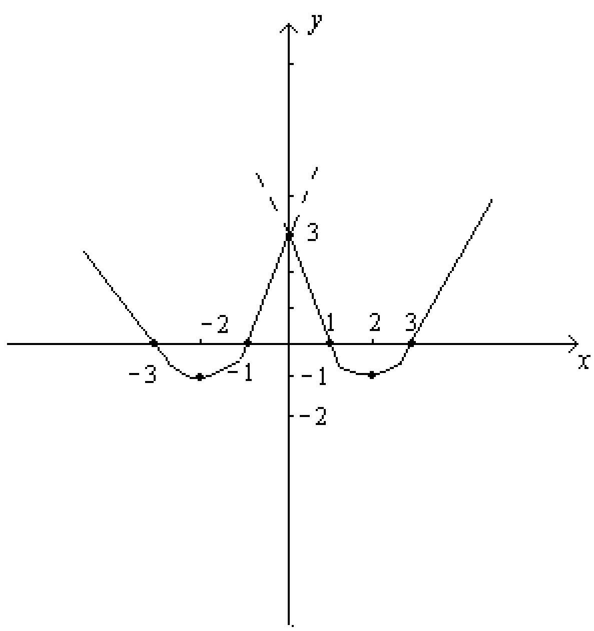
5)

$T(\alpha,\beta)$

$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-4}{2\cdot 1}=-2$

$\beta=-\dfrac{D}{4a}=-\dfrac{4}{4\cdot 1}=-1$

$T(-2,-1)$



<u>Primer 4:</u> Dat je skup funkcija $f(x)=ax^2+6x+c$ gde su a i c realni brojevi. Iz tog skupa odrediti onu funkciju koja ima nulu $x_1=6$ i čiji grafik sadrži tačku $M(2,8)$, zatim proučiti promene i konstruisati grafik dobijene funkcije.

$f(x)=ax^2+6x+c$ $\qquad$ $f(2)=0$

$f(3)=-7$

$f(-2)=8$

Napravićemo sistem jednačina. Kako. $f(2)=0 \Rightarrow$ to nam kaže da umesto X pišemo 2 a umesto $f(x)$ nulu. Slično i za $f(3)=-7$ i $f(-2)=8$

$$a = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$
$$-7 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$$
$$8 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$$

$$-4b = 8$$
$$b = -2$$

Postupak rešavanja ovog sistema je detaljno opisan u delu sistemi jednačina (pogledaj) Pomnožimo prvu jednačinu sa (-1) I saberemo sa trećom!!!

Vratimo ovo u prve dve.

$$a = -1$$
$$c = 8$$
$$f(x) = -1x^2 - 2x + 8$$