Kompleksni brojevi (C)

Kompleksni brojevi su izrazi oblika: $z = a + bi$ gde su a I b realni brojevi a $i \to$ simbol koji ima vrednost $i = \sqrt{-1}$.

Za kompleksan broj $z = a + bi$, a je njegov realni deo i obeležava se $\mathrm{Re}(z) = a$, b je njegov imaginarni deo i obeležava se $\mathrm{Im}(z) = b$, a $i = \sqrt{-1}$ je imaginarna jedinica.

Primeri:

$$
\begin{aligned}
&z_1 = 5 + 4i \to \mathrm{Re}(z_1) = 5, \mathrm{Im}(z_1) = 4 \\
&z_2 = 5 - 2i \to \mathrm{Re}(z_2) = 5, \mathrm{Im}(z_2) = -2 \\
&z_3 = -\frac{3}{4} - 7i \to \mathrm{Re}(z_3) = -\frac{3}{4}, \mathrm{Im}(z_3) = -7 \\
&z_4 = 8i \to \mathrm{Re}(z_4) = 0, \mathrm{Im}(z_4) = 8 \\
&z_5 = 2 \to \mathrm{Re}(z_5) = 2, \mathrm{Im}(z_5) = 0
\end{aligned}
$$

Dva kompleksna broja $a + bi$ i $c + di$ su jednaka ako I samo ako je $a = c$ i $b = d$,tj imaju iste realne I imaginarne delove.

Pošto smo rekli da je $i = \sqrt{-1}$,zanimljivo je videti kako se ponašaju stepeni broja i.

$$
\begin{aligned}
&i = \sqrt{-1} \\
&i^2 = -1 \\
&i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\
&i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \\
\hline
&i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\
&i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1 \\
&i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i \\
&i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1
\end{aligned}
$$

itd.

Šta zaključujemo? i stepenovano bilo kojim brojem može imati samo jednu od obe 4 vrednosti: $i, -1, -i$ ili 1.

Uopšteno, tu činjenicu bi mogli zapisati:

$$\begin{aligned} i^{4k} &= 1 \\ i^{4k+1} &= i \\ i^{4k+2} &= -1 \\ i^{4k+3} &= -i \end{aligned} \qquad \text{za} \quad k \in N.$$

Kako ovo primeniti u zadacima?

Primeri:

Izračunati:

$a) i^{100}$
$b) i^{2006}$
$v) i^{25}$
$g) i^{102}$
$d) i^{23}$

$a) i^{100}$

Ovde postoje 2 ideje : Ili da koristimo da je $i^4 = 1$ i naravno pravila za stepen : $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ i $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Dakle: $i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$ ili

$i^{100} = (i^4)^{50} = 1^{50} = 1$

Odlučite sami šta vam je lakše!

$b) i^{2006} = ?$

$i^{2006} = (i^2)^{1003} = (-1)^{1003} = -1$

$v) i^{25} = i^{24} \cdot i^{1} = (i^{2})^{12} \cdot i = (-1)^{12} \cdot i = 1 \cdot i = i$

$\downarrow$

Kad je stepen neparan, napišemo ga kao za 1 manji paran broj pa plus 1, to jest $25 = 24 + 1$.

$g) i^{102} = (i^{2})^{51} = (-1)^{51} = -1$

$d) i^{23} = i^{22} \cdot i^{1} = (i^{2})^{11} \cdot i = (-1)^{11} \cdot i = -1 \cdot i = -i$

Pazi: $(-1)^{\text{paran broj}} = 1$

$(-1)^{\text{neparan broj}} = -1$

Kako se sabiraju, oduzimaju I množe kompleksni brojevi?

1) Zbir dva kompleksna broja $a + bi$ i $c + di$ je kompleksan broj $(a + c) + i(b + d)$, a njihova razlika je $(a - c) + i(b - d)$. To znači da se sabiraju I oduzimaju ''normalno'', kao u R.

Primer: $z_1 = 5 + 3i$
$z_2 = 4 - 10i$

$$z_1 + z_2 = 5 + 3i + 4 - 10i = 5 + 4 + 3i - 10i = 9 - 7i$$

$$z_1 - z_2 = 5 + 3i - (4 - 10i) = 5 + 3i - 4 + 10i = 1 + 13i$$

2) Proizvod dva kompleksna broja $a + bi$ i $c + di$ je kompleksan broj $(ac - bd) + i(ad + bc) \rightarrow$ množi se ''svaki sa svakim'' I vodimo računa da je $i^2 = -1$.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bd\,\underline{i^2}$$

$$= ac + adi + bci - bd$$
$$= ac - bd + i(ad + bc)$$

Primer: $z_1 = -3 + 5i$
$z_2 = 4 - 2i$

$z_1 \cdot z_2 = (-3+5i)\cdot(4-2i) = -12 + 6i + 20i - 10i^2 =$ (sad zameni da je $i^2 = -1$, pa $-10i^2 = -10\cdot(-1) = 10$) $= -12 + 6i + 20i + 10 = -2 + 26i$

<u>Deljenje kompleksnih brojeva</u>

Recimo najpre da svaki kompleksan broj ima svoj <u>konjugovan</u> broj.

Za $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ konjugovan broj.

Primeri: za $z = 10 + 12i$ je $\bar{z} = 10 - 12i$

za $z = 4 - 3i$ je $\bar{z} = 4 + 3i$

za $z = -4 + 5i$ je $\bar{z} = -4 - 5i$

Dva kompleksna broja se dele tako što izvršimo racionalisanje sa konjugovanim brojem delioca.

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} =$gore množimo ''svaki sa svakim'' a dole je razlika kvadrata.

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-(di)^2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-d^2}$$

Primer 1)

$$= \frac{5+2i}{4-3i} = \frac{5+2i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{(5+2i)(4+3i)}{4^2-(3i)^2} =$$

$$= \frac{20+15i+8i+6i^2}{16-3^2 \cdot i^2} = (i^2 = -1)$$

$$= \frac{20+15i+8i-6}{16+9} = \frac{14+23i}{25} = \frac{14+23i}{25} = \frac{14}{25} + \frac{23}{25} i$$

Savet: Uvek na kraju rastavi $\frac{a+bi}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} i$ da bi mogao da pročitaš $\mathrm{Re}(z)$ i $\mathrm{Im}(z)$

Primer 2)

$$\frac{3+7i}{-5+3i} = \frac{3+7i}{-5+3i} \cdot \frac{-5-3i}{-5-3i}$$

$$= \frac{(3+7i)(-5-3i)}{(-5)^2-(3i)^2}$$

$$= \frac{(3+7i)(-5i-3i)}{(-5)^2-(3i)^2}$$

$$= \frac{-15-9i-35i-21i^2}{25-3^2 \cdot i^2}$$

$$= \frac{-15-9i-35i+21}{25+9}$$

$$= \frac{6-44i}{34} = \frac{6}{34} - \frac{44}{34} i = \frac{3}{17} - \frac{22}{17} i$$

<u>Modul</u> kompleksnog broja $z = a+bi$ je nenegativan broj $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Primeri: Za $z = 3+4i$ je $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5$

Za $z = -9-12i$ je $|z| = \sqrt{(-9)^2+(-12)^2} = \sqrt{81+144} = 15$

Navešćemo neke od osobina vezanih za kompleksne brojeve koje će nam dosta pomoći u rešavanju zadataka:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (komutativnost)
2) $(z_1 \cdot z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (asocijativnost)
3) $z + 0 = 0 + z = z$ (0 je netral za +)
4) $z + z^{'} = z^{'} + z = 0$ ($z^{'}$ je suprotni broj)
5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
6) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
7) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ (1 je neutral za *)
8) $z \cdot z^{'} = z^{'} \cdot z = 1$ ($z^{'}$ je inverzni za *)
9) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (distributivnost)
10) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
11) $|z^2| = |z|^2$
12) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

2) Nadji realni I imaginarni deo kompleksnog broja: $z = \frac{(1-i)^{12}}{(1+i)^5}$

Odredimo najpre $(1-i)^{12} = ?$

Podjimo od $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i + 1 = -2i$

Kako je $(1-i)^{12} = ((1-i)^2)^6 = (-2i)^6 = 2^6 \cdot i^6 = 2^6 \cdot (-1) = -2^6 = -64$

Nadjimo dalje $(1+i)^5 = ?$

$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$(1+i)^5 = (1+i)^4 \cdot (1+i) = ((1+i)^2)^2 \cdot (1+i) = (2i)^2 (1+i)$

$= 4 \cdot i^2 (1+i) = -4(1+i)$

$$z = \frac{(1-i)^{12}}{(1+i)^5} = \frac{-64}{-4(1+i)} = \frac{16}{1+i} = \frac{16}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} =$$

$$= \frac{16(1-i)}{1^2 - i^2} = \frac{16(1-i)}{1+1} = \frac{16(1-i)}{2} = 8(1-i) =$$

$$= 8 - 8i$$

Dakle : $\mathrm{Re}(z) = 8 \quad \mathrm{Im}(z) = -8$

b)

$$x-1+(y+3)i=(1+i)(5+3i)$$
$$x-1+(y+3)i=5+3i+5i+3i^2$$
$$x-1+(y+3)i=5+8i-3$$
$$\underbrace{x-1}_{\text{Re}}+\underbrace{(y+3)}_{\text{Im}}i=\underbrace{2}_{\text{Re}}+\underbrace{8}_{\text{Im}}i$$

Dakle : $\begin{array}{l} x-1=2\Rightarrow x=2+1\Rightarrow x=3 \\ y+3=8\Rightarrow y=8-3\Rightarrow y=5 \end{array}$

3) Ako je $w=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ dokazati da je $w^2+w+1=0$

Rešenje:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+1=$$
$$\frac{1-2i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2}{4}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+1=$$
$$\frac{1-2i\sqrt{3}+i^2\cdot 3}{4}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+1=$$
$$\frac{1-2i\sqrt{3}-3+2(-1+i\sqrt{3}+4}{4}=$$
$$\frac{1-2i\sqrt{3}-3-2+2i\sqrt{3}+4}{4}=\frac{0}{4}=0$$

4) Odredi sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju sistem jednačina:

$$|z-2i|=|z|$$
$$|z-i|=|z-1|$$

Rešenje: Neka je $z=a+bi$

$$z-2i=a+bi-2i=a+i(b-2)\Rightarrow|z-2i|=\sqrt{a^2+(b-2)^2}$$
$$z-i=a+bi-i=a+i(b-1)\Rightarrow|z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$$
$$z-1=a+bi-1=a-1+bi\Rightarrow|z-1|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$$

Dakle:

$$\sqrt{a^2+(b-2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$$

Kvadrirajmo obe jednačine!

$$a^2+(b-2)^2=a^2+b^2$$
$$a^2+(b-1)^1=(a-1)^2+b^2$$

$$b^2-4b+4=b^2$$
$$-4b=-4$$

zamenimo u drugu jednačinu

$$b=1$$

$$a^2+(b-2)^2=(a-1)^2+b^2$$
$$a^2+(1-1)^2=(a-1)^2+1^2$$
$$a^2+0=a^2-2a+1+1$$
$$2a=2$$
$$a=1$$

Traženi kompleksni broj je $z=1+i$

5) Nadji sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju:

$$z^2+|\bar{z}|=0$$

Rešenje: Neka je $z=a+bi$ traženi kompleksni broj. Onda je $\bar{z}=a-bi, |\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$

$$(a+bi)^2+\sqrt{a^2+b^2}=0$$

$a^2+2abi+b^2i^2+\sqrt{a^2+b^2}=0$ Kako je $i^2=-1 \Rightarrow$ Ovde očigledno I Re I Im moraju

$$\underbrace{a^2-b^2+\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{Re}}+\underbrace{2ab}_{\text{Im}}i=0$$

biti nula.

$$a^2-b^2+\sqrt{a^2+b^2=0}$$
$$2ab=0$$

Iz $2ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$

1) Ako je $a=0$, zamenimo u prvu jednačinu:

$$0^2-b^2+\sqrt{0^2+b^2}=0 \qquad (b^2 \geq 0)$$
$$\sqrt{b^2}=b^2$$

Ovde je očigledno $b=0$ i $b=-1$

2) Ako je $b=0$, zamenimo u prvu jednačinu:

$$a^2-0^2+\sqrt{a^2+0^2}=0$$
$a^2+\sqrt{a^2}=0$ nema rešenja sem $a=0$
$$\sqrt{a^2}=-a^2$$

Dakle: $z=0$ i $z=i$ i $z=-i$ su traženi brojevi.

6) Za koje vrednosti prirodnog broja n važi jednakost:

$$(1+i)^n=(1-i)^n \text{ ?}$$

Rešenje:

$$(1+i)^n=(1-i)^n$$
$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n}=1 \Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1$$

Transformišemo izraz:

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{1^2+i^2}=\frac{(1+i)^2}{1+1}=\frac{(1+i)^2}{2}$$

$$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$$

Dakle:

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

Vratimo se u $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1$, dobijemo $i^n=1$

A ovo je (vec smo videli) moguće za n $=4k$, $k\in N$.