# Geometrijski niz

Podjimo od dva primera:
Primer 1: 3,6,12,24,48 ...
Primer 2: 81,27,9,3, ...

Pažljivim posmatranjem možemo zaključiti da je svaki sledeći član niza u **primeru 1**. 2 puta veći od predhodnog člana , pa će sledeći članovi biti, $48*2=96, 96*2=192,...$
U **primeru 2.** primećujemo da je svaki sledeći član tri puta manji od predhodnog, pa bi sledeći članovi bili $3:3=1, 1:3=\frac{1}{3}, \frac{1}{3}:3=\frac{1}{9},...$
Ovakvi nizovi zovu se geometrijski i kao što vidimo , mogu biti rastući (primer 1.) i opadajući (primer 2.)
Dakle: Niz brojeva u kome je količnik ma koja dva uzastopna člana niza stalan zove se geometrijski niz ili progresija. Naravno i ovde je važno od kog broja počinje niz, pa se taj broj zove "prvi" član niza I obeležava se sa $b_1$.
$\rightarrow$ za primer 1. $b_1=3$, $b_2=6$, $b_3=12,...$
$\rightarrow$ za primer 2. $b_1=81$, $b_2=27$, $b_3=9,...$
$\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=...=\frac{b_n}{b_{n-1}}=q \rightarrow$ količnik niza

$\rightarrow$ za primer 1. $q=2$ (rastući niz)
$\rightarrow$ za primer 2. $q=\frac{1}{3}$ (opadajući niz)
Ako znamo $b_1$ (prvi član niza) i q (količnik niza) niz je potpuno odredjen , odnosno možemo da ga zapišemo.
Bilo koji član niza ( n-ti član ) se traži po formuli :

$$b_n=b_1*q^{n-1}$$

Zbir prvih n-članova niza se traži

i) $q>1$

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

ii) $q<1$

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

Za svaki član niza važi:

$$b_n=\sqrt{b_{n-1}*b_{n+1}}$$

**primer 1**
Odrediti geometrijsku progresiju kod koje je $b_1+b_3=15 \wedge b_2+b_4=30$

$$b_1 + b_3 = 15$$
$$b_2 + b_4 = 30$$

Iskoristimo formulu : $b_n = b_1 * q^{n-1}$ po njoj je:

$$b_3 = b_1 * q^2$$
$$b_2 = b_1 * q$$
$$b_4 = b_1 * q^3$$

Zamenimo ovo u postavljeni sistem:

$$b_1 + b_1 * q = 15$$
$$b_1 q + b_1 q^3 = 30$$ $\rightarrow$ Izvučemo "zajednički" iz obe jednačine:

$$b_1(1+q^2) = 15$$
$$b_1 q(1+q^2) = 30$$ $\rightarrow$ Ovde je "trik" da se jednačine podele.

$$\frac{b_1(1+q^2)}{b_1 q(1+q^2)} = \frac{15}{30}$$ $\rightarrow$ Skratimo šta može !

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 2$$

Vratimo se u jednu od jednačina: (naravno biramo lakšu).

$$b_1(1+q^2) = 15$$
$$b_1(1+4) = 15 \Rightarrow b_1 = 3$$

Dakle traženi niz je : 3,6,12,24,48,…

Ako izmedju brojeva a i b treba umetnuti (interpolirati) k brojeva tako da zajedno sa a i b čine geometrijski niz, onda količnik q tog niza tražimo po formuli :

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

# **Zadaci:**

1) Izračunati deseti član geometrijskog niza 1,3,9,27...

$\underset{b_1}{1}, \underset{b_2}{3}, \underset{b_3}{9}, \underset{b_4}{27}, ...$ Iz tog niza zaključujemo da je: $b_1 = 1$ i $q = 3$

Pošto se bilo koji član niza računa po formuli $b_n = b_1 * q^{n-1}$ to će deseti član biti :

$b_{10} = b_1 * q^{10-1}$
$b_{10} = b_1 * q^9$
$b_{10} = 1 * 3^9$
$b_{10} = 3^9$
$b_{10} = 19683$

2) U geometrijskom nizu je : $b_6 - b_4 = 216 \wedge b_3 + b_1 = 8 \wedge S_n = 40$

Izračunati $a_1$ ,q i $n$

$$\begin{aligned} b_6 - b_4 &= 216 \\ b_3 - b_1 &= 8 \\ S_n &= 40 \\ \hline b_n &= b_1 * q^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_6 &= b_1 * q^5 \\ b_4 &= b_1 * q^3 \\ b_3 &= b_1 * q^2 \end{aligned}$$

Zamenimo u prve dve jednačine!

$$\left.\begin{aligned} b_1 \cdot q^5 - b_1 \cdot q^3 &= 216 \\ b_1 q^2 - b_1 &= 8 \end{aligned}\right\}$$ izvučemo zajednički

$$\left.\begin{aligned} b_1 q^3 (q^2 - 1) &= 216 \\ b_1 (q^2 - 1) &= 8 \end{aligned}\right\}$$ podelimo ih

$$\frac{b_1 q^3 (q^2 - 1)}{b_1 (q^2 - 1)} = \frac{216}{8}$$

$q^3 = 27 \Rightarrow q^3 = 3^3 \Rightarrow q = 3$

$b_1 (q^2 - 1) = 8$

$b_1 (3^2 - 1) = 8 \Rightarrow b_1 \cdot 8 = 8 \Rightarrow b_1 = 1$

$$\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=40$$

$$\frac{3^n-1}{2}=40$$

Pošto je $q=3>1$ koristimo formulu $S_n=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ $\Rightarrow 3^n-1=80$

$$3^n=81$$

$$3^n=3^4\Rightarrow n=4$$

3) Tri broja, čiji je zbir 26, obrazuju geometrijski niz. Ako se im brojevima doda redom 1,6 i 3, dobijaju se tri broja koja obrazuju aritmetički niz. Odrediti te brojeve.

Neka su tri broja : $b_{1,}b_2$ i $b_3$ I važi : $b_1+b_2+b_3=26$ a kako je $b_2=b_1q\wedge b_3=b_1q^2$

$b_1+b_1q+b_1q^2=26$ tj. $b_1(1+q+q^2)=26$

Ako im dodamo redom 1,6 i 3 dobićemo :

$$a_1=b_1+1$$
$$a_2=b_2+6=b_1q+6$$
$$a_3=b_3+3=b_1q^2+3$$

Pošto oni čine aritmetičku progresiju, mora biti : $a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}$ tj, $a_1+a_3=2a_1$

$(b_1+1)+(b_1q^2+3)=2(b_1q+6)\to$ "sredimo"

$$b_1+1+b_1q^2+3=2b_1q+12$$
$$b_1q^2-2b_1q+b_1=12-1-3$$
$$b_1(q^2-2q+1)=8$$

Napravimo sada sistem:

$$\left.\begin{aligned}b_1(q^2+q+1)&=26\\ b_1(q^2-2q+1)&=8\end{aligned}\right\}\text{ podelimo ih}$$

$$\frac{q^2+q+1}{q^2-2q+1}=\frac{26}{8}$$
$$26(q^2-2q+1)=8(q^2+q+1)/:2$$
$$13(q^2-2q+1)=4(q^2+q+1)$$
$$13q^2-26q+13=4q^2+4q+4$$
$$9q^2-30q+9=0$$

$3q^2-10q+3=0 \rightarrow$ kvadratna "po q"

$$q_{1,2}=\frac{10\pm 8}{3\cdot 2}=\frac{10\pm 8}{6}$$
$$q_1=3 \wedge q_2=\frac{1}{3}$$

Za $q=3$

$$b_1=\frac{26}{q^2+q+1}=\frac{26}{13}=2$$

Za $q=\frac{1}{3}$

$$b_1=\frac{26}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1}=\frac{26}{\frac{13}{9}}=18$$

<u>Rešenja</u>

2,6,18 $\rightarrow$ Geometrijski niz

3,12,21 $\rightarrow$ Aritm. Niz

<u>Rešenja</u>

18,6,2 $\rightarrow$ Geometrijski niz

19,12,5 $\rightarrow$ Aritm. Niz

4) Izračunati zbir n brojeva oblika 1, 11, 111, 1111…

1, 11, 111, 1111, …

Trik je napisati brojeve drugačije:

$$1=\frac{10-1}{9}$$
$$11=\frac{100-1}{9}=\frac{10^2-1}{9}$$
$$111=\frac{1000-1}{9}=\frac{10^3-1}{9}$$

Dakle

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \dots =$$

$$= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \dots + \frac{10^n-1}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\left[10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[\underbrace{10 + 10^2 + \dots + 10^n} - n\right]$$

Geometrijski niz $\rightarrow$ $b_1 = 10 \ \wedge q = 10$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$$

$$S_n = \frac{1}{9}\left[\frac{10\cdot(10^n-1)}{10-1} - n\right]$$

$$S_n = \frac{1}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9} - n\right] = \frac{1}{81}\left[10(10^n-1) - 9n\right]$$

5) Izračunati zbir n brojeva oblika $\frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{23}{24}, \frac{47}{48} \dots$

Sličan trik kao malopre!

$$\frac{5}{6} = \frac{6-1}{6} = 1 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{11}{12} = \frac{12-1}{12} = 1 - \frac{1}{12}$$

$$\frac{23}{24} = \frac{24-1}{24} = 1 - \frac{1}{24}$$

$$S_n = \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{23}{24} + \dots = 1 - \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{12} + 1 - \frac{1}{24} + \dots$$

(Ima n jedinica) $\quad = n - (\underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots})$

Geometrijski niz

$b_1 = \frac{1}{6} \qquad q = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{6}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_n = \frac{1}{3}(1-(\frac{1}{2})^n)$$

Dakle :

$$S_n = n - \frac{1}{3}\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]$$

$$S^n = n - \frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{2n}\right]$$

6) Ako su $a, b, c, k-ti$ , n-ti i $p-ti$ članovi jedne geometrijske progresije tada je $a^{n-p} \cdot b^{p-k} \cdot c^{k-n} = 1$. Dokazati.

Koristićemo formulu $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Pošto je $a$ k-ti član $\Rightarrow a = b_1 \cdot q^{k-1}$

Pošto je $b$ n-ti član $\Rightarrow b = b_1 \cdot q^{n-1}$

Pošto je $c$ p-ti član $\Rightarrow c = b_1 \cdot q^{p-1}$

$$a^{n-p} \cdot b^{p-k} \cdot c^{k-n} =$$
$$b_1^{n-p} \cdot q^{(k-1)(n-p)} \cdot b_1^{p-k} \cdot q^{(n-1)(p-k)} \cdot b_1^{k-n} \cdot q^{(p-1)(k-n)}$$

Izračunajmo posebno "izložilac" za $b_1$:

$$n-p+p-k+k-n=0$$

Sada ćemo izračunati "izložilac" za q:

$$(k-1)(n-p)+(n-1)(p-k)+(p-1)(k-n)=$$
$$kn-kp-n+p+np-kn-p+k+pk-pn-k+n=0$$

Kao što primećujete sve se potire!

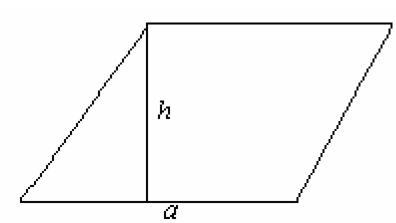
Pa je : $a^{n-p} \cdot b^{p-k} \cdot c^{k-n} = b_1^{o} \cdot q^{o} = 1$

Kraj dokaza.

7) Odrediti paralelogram tako da merni brojevi osnovice, visine i površine čine geometrijski niz.

$a, h, P \rightarrow$ čine g. niz

$P = a \cdot h \rightarrow$ formula za površinu




A pošto $a, h, P$ čine geometrijski niz , to mora biti:

$$h = \sqrt{aP} \Rightarrow h^2 = aP \Rightarrow P = \frac{h^2}{a}$$

$$ah = \frac{h^2}{a} \Rightarrow h = a^2 \Rightarrow P = a \cdot a^2 = a^3$$

Dakle: $a = a, h = a^2$ i $P = a^3$

8)

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$
$$A = a, B = 2b, C = -c$$

Koreni su jednaki ako je diskriminanta $D = 0$

$$D = B^2 - 4AC$$
$$D = (2b)^2 - 4 \cdot ac = 4b^2 - 4ac = 0$$
$$4b^2 = 4ac$$
$$b^2 = ac$$

$b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{ac}$ a to je kao što znamo osobina geometrijskog niza $a,b,c$. Kraj dokaza.

# Beskonačni red

Neka je dat beskonačni niz realnih brojeva $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Izraz oblika $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zove se beskonačni red.

Geometrijskom nizu $a, aq, aq^2, ..., aq^n, ...$ odgovara red:

$a(1+q+q^2+...+q^n+...) = a\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

Zbir beskonačno opadajućeg reda (geometrijskog) je $S = \dfrac{a}{1-q}$ za $|q|<1$

## Zadaci:

1) Decimalni broj 0,7777777…

$$0,7777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ...$$
$$= \frac{7}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...\right)$$
$$= \frac{7}{10}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...\right)}$$

Geometrijski red , $a = \dfrac{7}{10}, q = \dfrac{1}{10}$

Njegova suma je $S = \dfrac{a}{1-q} = \dfrac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{7}{9}$

2) Izračunati vrednost mešovito periodičnog razlomka 0,3444….

$$0{,}3444\ldots=\frac{3}{10}+\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000}+\ldots$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{4}{100}\cdot\underbrace{(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots)}$$

Geometrijski red :

$$a=\frac{4}{100},\, q=\frac{1}{10}$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{\frac{4}{100}}{\frac{9}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{4}{90}=\frac{31}{90}$$

3) Nadji red ako je $S=\dfrac{3}{3-x}$

mi znamo da je formula : $S=\dfrac{a}{1-q}$

Znači gde je 3-x treba da je 1-q. Izvršićemo “sredjivanje” izraza :

$$S=\frac{3}{3-x}=\frac{3}{3(1-\frac{x}{3})}=\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\Rightarrow a=1, q=\frac{x}{3}$$

Pa će traženi red biti:

$$a(1+q+q^2+q^3+\ldots)=$$

$$1\cdot(1+\frac{x}{3}+(\frac{x}{3})^2+(\frac{x}{3})^3+\ldots)=1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{3^3}+\ldots$$

4) Nadji red ako je $S=\frac{6}{3-2x}$

$$S=\frac{6}{3-2x}=\frac{6}{3(1-\frac{2x}{3})}=\frac{2}{1-\frac{2x}{3}}\Rightarrow a=2, q=\frac{2x}{3}$$

Pa će red biti :

$$a(1+q+q^2+q^3+...+)=$$
$$2(1+\frac{2x}{3}+(\frac{2x}{3})^2+(\frac{2x}{3})^3+...)=$$
$$2+\frac{4x}{3}+\frac{8x^2}{9}+\frac{16x^3}{27}+...$$

5) Sledeći periodični razlomak pretvoriti u običan razlomak

2,717171….

$$2{,}717171...=2+\frac{7}{10}+\frac{1}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000+...}$$

Ovde ćemo uočiti 2 geometrijska reda:

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{1000}+\frac{7}{100000}+...=\frac{7}{10}(1+\frac{1}{100}+...)$$
$$\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{1000000}+...=\frac{1}{100}(1+\frac{1}{100}+...)$$

Zbir prvog reda je $S_1=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{7}{10}}{\frac{99}{100}}=\frac{70}{99}$

Zbir drugog reda je $S_2=\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{1}{99}$

Vratimo se “na zadatak”:

$$2{,}717171... = 2 + \frac{70}{99} + \frac{1}{99} = \frac{269}{99}$$

$$S = \frac{269}{99}$$

6) U jednakostraničnom trouglu stranice $a$ upisan je novi jednako stranični trougao spajanjem sredinama datog trougla . U dobijenom trouglu je upisan drugi trougao na isti način, itd. Odrediti zbir obima svih trouglova.

Stranica 1. trougla je $a$

Stranica 2. trougla je $\frac{a}{2}$

Stranica 3. trougla je $\frac{a}{4}$

Stranica 4. trougla je $\frac{a}{8}$

Njihovi obimi će biti : $O = 3 \cdot a$

Znači:

$$o_1 = 3a$$

$$o_2 = 3 \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$o_3 = 3 \cdot \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$$

$$o_4 = 3 \cdot \frac{a}{8} = \frac{3a}{8}$$

A njihov zbir je :

$$o_1 + o_2 + o_3 + ... =$$

$$= 3a + \frac{3a}{2} + \frac{3a}{4} + \frac{3a}{8} + ...$$

$$= 3a(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...)$$

po formuli : $S = \frac{a}{1-q}$

$$= 3a(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...)$$

$$=\frac{3a}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3a}{\frac{1}{2}}=6a$$ Znači zbir obima je 6a.