DETERMINANTE

Najprostije rečeno determinante su kvadratne šeme. Mogu biti drugog, trećeg, četvrtog,...n-tog reda.

DRUGOG REDA

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc   Znači računaju se tako što pomnožimo elemente na takozvanoj glavnoj dijagonali, pa od toga oduzmemo pomnožene elemente na sporednoj dijagonali.

Primer:

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \circ 7 - 4 \circ 5 = 21-20 = 1$ $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 12 \end{vmatrix} = (-1) \circ 12- (-5) \circ 3=-12+15=3$

TREĆEG REDA

Determinante trećeg reda možemo razviti po bilo kojoj vrsti ili koloni. Najpre svakom elementu dodelimo predznak + ili -, i to radimo neizmenično:

$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ Samo da vas podsetimo: vrste su $\longrightarrow$, a kolone $\downarrow$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ = Ako recimo hoćemo da razvijemo po prvoj vrsti=

$= + a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, ili ako recimo razvijamo po drugoj koloni:

$= - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Najbolje je ,naravno, da razvijamo po onoj koloni ili vrsti gde ima najviše nula !

Primer: Izračunaj vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$ Najpre iznad svakog broja napišite predznake: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$, ili ako vam je lakše samo iznad brojeva u vrsti ili koloni po kojoj ste rešili da razvijete determinantu. Mi smo rešili po drugoj vrsti jer ima jedna nula (moglo je i po trećoj koloni, sve jedno).

Dakle:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{7} & \overset{-}{0} \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1(3 \circ 2 - 1 \circ 3) + 7(5 \circ 2 - 2 \circ 1) = -3 + 56 =$$

$$= 53$$

Drugi način za računanje determinanti trećeg reda, medju učenicima vrlo popularan, je **SARUSOVO pravilo**.

Pored date determinante dopišu se prve dve kolone , pa se elementi množe dajući im znake kao na slici:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 - c_1b_2a_3$$

- - -

+ + +

Primer: Izračunaj vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 5 \circ 7 \circ 2 + 3 \circ 0 \circ 2 + 1 \circ 1 \circ 3 - 3 \circ 1 \circ 2 - 5 \circ 0 \circ 3 - 1 \circ 7 \circ 2 =$$

$$= 70 + 0 + 3 - 6 - 0 - 14 = 53$$

Dakle, na oba načina smo dobili isti rezultat,pa vi odaberite sami šta vam je lakše.

ČETVRTOG REDA

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$ = Možemo je razviti po bilo kojoj vrsti ili koloni! I ovde slično kao za

determinante trećeg reda prvo napišemo predznake svima ili samo onoj vrsti ili koloni po kojoj ćemo da razvijamo determinantu.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$ Mi ćemo , recimo, da razvijemo determinantu po prvoj koloni:

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a_1} & b_1 & c_1 & d_1 \\ \overset{-}{a_2} & b_2 & c_2 & d_2 \\ \overset{+}{a_3} & b_3 & c_3 & d_3 \\ \overset{-}{a_4} & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$= +a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Naravno, sad bi trebalo da razvijemo svaku od ove četiri determinante trećeg reda....

Složićete se da ovo nije baš lako.

Naučimo zato osobine determinanata koje će nam pomoći u rešavanju zadataka.

OSOBINE DETERMINANATA

1. **Determinanta menja znak ako dve vrste ili kolone izmenjaju svoja mesta.**

2. **Vrednost determinante se ne menja ako sve vrste i kolone promene svoje uloge.**

3. **Determinanta se množi brojem, kad se tim brojem pomnože svi elementi ma koje (ali samo jedne) vrste ili kolone.**
   Obrnuto, zajednički faktor elemenata jedne vrste ili kolone može se izvući ispred determinante
   .
   Na primer:

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1k & b_1k & c_1k \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1k & b_1 & c_1 \\ a_2k & b_2 & c_2 \\ a_3k & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ itd ili}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. **Ako je u determinanti svaki element neke k-te vrste (kolone) zbir dva ili više sabiraka, onda je ona jednaka zbiru dve ili više determinanata, koje imaju iste elemente kao i data determinanta, osim elemenata k-te vrste (kolone).**

   Na primer:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+m_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+m_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+m_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & m_1 & c_1 \\ a_2 & m_2 & c_2 \\ a_3 & m_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. **Ako su svi elementi jedne vrste(kolone) jednaki nuli, vrednost determinante je nula.**

$$\begin{vmatrix} 3 & -9 & 55 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 77 & 68 & 34 & -80 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

6. **Ako elementi u dve vrste ili kolone imaju iste vrednosti, vrednost determinante je opet nula.**

Primer:

$$\begin{vmatrix} 12 & 7 & 3 \\ -9 & 4 & 6 \\ 12 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ jer su elementi prve i treće vrste jednaki}$$

7. **Ako su dve vrste (kolone) proporcionalne među sobom , vrednost determinante je opet nula**.

Primer:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -9 & 5 & 56 \\ 10 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 0 \text{ jer su prva i treća vrsta proporcionalne, tj. prva puta 3 daje treću}$$
vrstu.

8. **Vrednost neke determinante ostaje nepromenjena ako se elementima jedne vrste(kolone) dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste(kolone) pomnoženi istim brojem!**

Ova osma osobina će nam pomoći da lakše rešimo determinante četvrtog i višeg reda.

Primer :

Izračunaj vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Rešenje:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ Ideja je da se ispod jedinice u prvoj koloni naprave sve nule, koristeći osobinu determinanti broj 8.

Prvo ćemo napraviti nulu gde je 4. Prvu vrstu ćemo pomnožiti sa – 4 i to sabrati sa četvrtom vrstom i rešenja upisati umesto četvrte vrste.Prve tri vrste se prepisuju!

$1\circ(-4)+4=0$
$2\circ(-4)+2= -6$
$4\circ(-4)+1= -15$
$(-1)(-4)+(-2)=2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -15 & 2 \end{vmatrix}$$

Dalje pravimo nulu gde je trojka. Prvu vrstu ćemo pomnožiti sa 3 i to sabrati sa trećom vrstom , pa rešenja upisati umesto treće vrste. Prvu, drugu i četvrtu vrstu prepisujemo.

$1\circ 3+(-3)=0$
$2\circ 3+1 = 7$
$4\circ 3+1 =13$
$(-1)\circ 3+(-2)= -5$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -15 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 13 & -5 \\ 0 & -6 & -15 & 2 \end{vmatrix}$$

Još nam preostaje da gde je 2 napravimo nulu.Prvu vrstu ćemo pomnožiti sa –2 i to sabrati sa drugom vrstom. Dakle

$(-2) \circ 1+2= 0$
$(-2) \circ 2+2= -2$
$(-2) \circ 4+(-3)=-11$
$(-2)(-1)+5=7$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 13 & -5 \\ 0 & -6 & -15 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -11 & 7 \\ 0 & 7 & 13 & -5 \\ 0 & -6 & -15 & 2 \end{vmatrix}$$

Ako ovu determinantu razvijemo po prvoj koloni, imaćemo samo jedan član , jer se svi ostali množe sa nulom, pa imaju vrednost nula!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -11 & 7 \\ 0 & 7 & 13 & -5 \\ 0 & -6 & -15 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -11 & 7 \\ 7 & 13 & -5 \\ -6 & -15 & 2 \end{vmatrix}$$

Upotrebimo Sarusovo pravilo:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -11 & 7 & -2 & -11 \\ 7 & 13 & -5 & 7 & 13 \\ -6 & -15 & 2 & -6 & -15 \end{array}\right. = -52-330-735+154+150+546 = -267$$

- - -

+ + +

Vi naravno ne morate da idete korak po korak, već odmah napravite sve tri nule!

Primer:

Izračunaj determinantu: $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

Rešenje:

Napravićemo nule po prvoj koloni i to:

- Od četvrte vrste oduzmemo prvu pa to upišemo umesto četvrte vrste
- Od treće vrste oduzmemo prvu pa to upišemo umesto treće vrste
- Od druge vrste oduzmemo prvu pa to upišemo umesto druge vrste

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

Iz prve vrste možemo izvući zajedničko a. Pa je:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

Ovu novu determinantu naravno razvijamo po prvoj koloni:

$a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$ I ovde iz prve kolone možemo izvući zajednički (a-b)

$a(a-b) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} =$ Ajde opet da napravimo one nule u prvoj koloni!

- od druge vrste oduzmemo prvu : c-a-b+a=c-b
- od treće vrste oduzmemo prvu : c-a-b+a=c-b i d-a-b+a=d-b

$$a(a-b)\begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = a(a-b)\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} = a(a-b)(c-b)(d-c)$$

Dakle rešenje početne determinante je:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(a-b)(c-b)(d-c)$$