Aritmetički niz:

Podjimo od dva primera:

Primer 1: $3,5,7,9,11,...$

Primer 2: $55,50,45,40,...$

Nije teško zaključiti da će u prvom primeru nekoliko sledećih članova biti 13,15,17,… jer se svaki sledeći član povećava za dva. U drugom primeru će nekoliko sledećih članova biti 35,30,25,… jer se svaki sledeći smanjuje za 5. Kako vidimo , niz može biti rastući ili opadajući.

Ovakvi nizovi u kojima je razlika ma koja dva uzastopna člana konstantna nazivaju se **Aritmetički nizovi** ili aritmetičke progresije.

Vrlo je važno od kog broja počinje niz, pa se on zove **prvi član niza** i obeležava se sa a_1.

Za primer 1 $\rightarrow$ prvi član niza je $a_1 = 3$

Za primer 2 prvi član niza $a_1 = 55$

Razlika (diferencija) niza je broj za koji se niz povećava (smanjuje) i obeležava se slovom d .

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1}$$

Za primer 1. $\rightarrow$ $d = 2$ (raste niz)

Za primer 2. $\rightarrow$ $d = -5$ (opada niz)

Nekad će nam biti potrebno da nadjemo stoti, hiljaditi ili bilo koji drugi član niza. Slažete se da je naporno pisati ih redom. Tu nam pomaže formula za n-ti član niza:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ako trebamo sabrati prvih n-članova niza,tu važi formula:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \quad \text{ili} \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Za svaki aritmetički niz još važi:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{ili} \quad a_n = \frac{a_{n-j} + a_{n+j}}{2} \qquad j = 2,...,n-1$$

Ako izmedju brojeva a i b treba umetnuti (interpolirati) k-brojeva tako da zajedno sa a i b čine aritmetički niz, onda razliku d tog niza tražimo po formuli $d=\frac{b-a}{k+1}$

Zadaci:

1) Peti član aritmetičkog niza je 19 a deseti član niza je 39. Odrediti niz.

Rešenje:
$$a_5=19$$
$$a_{10}=39$$

Aritmetički niz je potpuno odredjen ako znamo prvi član a_1 i razliku d. Da bi našli ove 2 nepoznate primenićemo formulu za n-ti član niza:

$a_n=a_1+(n-1)d$ za $n=5 \Rightarrow a_5=a_1+4d=19$

za $n=10 \Rightarrow a_{10}=a_1+9d=39$

Sastavićemo sistem jednačina:

$$a_1+4d=19 /\cdot(-1)$$
$$a_1+9d=39$$

$$-a_1-4d=-19$$
$$+\ a_1+9d=39$$

$$5d=20$$
$d=4 \rightarrow$ vratimo se u jednu od jednačina

$$a_1+4d=19$$
$$a_1+16=19$$
$$a_1=3$$

Znači prvi član niza je 3 a povećava se za 4 pa je niz:

3,7,11,15,19,…

Njegov opšti član će biti:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 3 + (n-1)\cdot 4$$
$$a_n = 4n - 1$$

2) Nadji prvi član a_1 i diferenciju d aritmetičkom nizu ako je :

$a_2 + a_5 - a_3 = 10$ i $a_2 + a_9 = 17$

Rešenje: Ovakav tip zadatka rešavamo pomoću opšteg člana:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow \begin{array}{l} a_2 = a_1 + d \\ a_5 = a_1 + 4d \\ a_3 = a_1 + 2d \\ a_9 = a_1 + 8d \end{array}$$

Zamenimo ovo u 2 date jednačine:

$$(a_1 + d) + (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 10$$
$$(a_1 + d) + (a_1 + 8d) = 17$$

$$a_1 + d + a_1 + 4d - a_1 - 2d = 10$$
$$a_1 + d + a_1 + 8d = 17$$

$$a_1 + 3d = 10 \rightarrow$$
$$2a_1 + 9d = 17$$

pomnožimo ovu jednačinu sa (-2)

$$3d = -3$$
$$d = -1$$

$$a_1 + 3d = 10$$
$$a_1 - 3 = 10$$
$$a_1 = 13$$

Znači niz je opadajući I glasi:

13,12,11,10,9,8,7,…

3) Odrediti aritmetički niz ako je: $5a_1 + 10a_5 = 0$

$S_4 = 14$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_5 = a_1 + 4d$$
$$5a_1 + 10(a_1 + 4d) = 0$$
$$5a_1 + 10a_1 + 40d = 0$$
$$15a_1 + 40d = 0$$
$$3a_1 + 8d = 0$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$
$$S_4 = \frac{4}{2}\left[2a_1 + (4-1)d\right]$$
$$14 = 2\left[2a_1 + 3d\right]$$
$$2a_1 + 3d = 7$$

Sad ove dve jednačine "upakujemo" :

$$3a_1 + 8d = 0 / \cdot 2$$
$$2a_1 + 3d = 7 / \cdot (-3)$$

$$6a_1 + 16d = 0$$
$$-6a_1 - 9d = -21$$

$$7d = -21$$
$$d = -3$$
$$3a_1 + 8d = 0 \Rightarrow 3a_1 - 24 = 0$$
$$3a_1 = 24$$
$$a_1 = 8$$

Znači niz je : 8,5,2,-1,-4,…

4) Izračunati n i a_n u aritmetičkoj progresiji za koje su: $a_1 = 2$, $d = 5$, $S_n = 245$

Znači ovde nam treba n=?

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$245 = \frac{n}{2}\left[2\cdot 2 + (n-1)\cdot 5\right]$$

$$245 = \frac{n}{2}\left[4 + 5n - 5\right]$$

$$490 = n\left[5n - 1\right]$$

$$490 = 5n^2 - n$$

$$5n^2 - n - 490 = 0$$

Dobili smo kvadratnu jednačinu "po n".

$$a = 5, b = -1, c = -490$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 99}{10}$$

$$n_1 = 10, n_2 = -\frac{98}{10}$$

Nemoguće

Znači : $n = 10$ je jedino rešenje

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{10} = 2 + (10-1)\cdot 5$$

$$a_{10} = 2 + 45$$

$$a_{10} = 47$$

5) Zbir prva tri člana aritmetičkog niza je 36, a zbir kvadrata prva tri člana je 482. Odrediti niz.

Da postavimo problem:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 36$$

$$a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2} = 482$$

Iskoristićemo da je

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=36$$
$$a_1^{\,2}+(a_1+d)^2+(a_1+2d)^2=482$$

$3a_1+3d=36$

$a_1+d=12$ Odavde ćemo izraziti a_1 i zameniti u drugu jednačinu sistema.

$a_1=12-d$

$$(12-d)^2+(12-d+d)^2+(12-d+2d)^2=482$$
$$(12-d)^2+12^2+(12+d)^2=482$$
$$144-24d+d^2+144+144+24d+d^2=482$$
$$2d^2+432=482$$
$$2d^2=50$$
$$d^2=25$$
$$d=\pm\sqrt{25}$$
$$d=5$$
$$a_1=12-5$$
$$a_1=7$$

Ili
$$d=-5$$
$$a_1=12+5$$
$$a_1=17$$

Dakle, postoje 2 takva niza:

7,12,17,22,27,…

17,12,7,2,-3,…

6) Rešiti jednačinu: $3+7+11+...+x=210$ $\longrightarrow$

$$a_1=3$$
$$a_2=7$$
$$a_n=x$$
$$S_n=210$$

$a_1 = 3$
$d = 4$
$S_n = 210$

$x = a_n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$210 = \frac{n}{2}\left[2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 4\right]$$

Dakle: $$210 = \frac{n}{2}\left[6 + 4n - 4\right]$$

$$210 = \frac{n}{2}\left[4n + 2\right]$$

$$210 = 2n^2 + n$$

$$2n^2 + n - 210 = 0$$

Kvadratna "po n"

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm 41}{4}$$

$$n_1 = 10$$

$$n_2 = -\frac{42}{4}$$

Dakle $n = 10$

$x = a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9 \cdot 4 = 3 + 36 = 39$
$x = 39$

7) Aritmetički niz ima 20 članova. Zbir članova koji su na parnim mestima je 250, a zbir članova na neparnim mestima 220. Naći dva srednja člana.

Postavimo prvo problem:

$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{20} = 250$
$a_1 + a_3 + ... + a_{19} = 220$

Na ovaj način smo ustvari dobili 2 niza sa po 10 članova čiji su zbirovi : za prvih 250 i za drugi 220, a kod oba dva niza je razlika 2d.

Primenićemo formula za $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2a_2 + (10-1)\cdot 2d]$$

$$250 = 5[2a_2 + 18d]$$

Za prvi niz $\Rightarrow$ $2a_2 + 18d = 50$

$$a_2 + 9d = 25$$

$$a_1 + 10d = 25$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2a_1 + (10-1)\cdot 2d]$$

Za drugi niz $\Rightarrow$ $220 = 5[2a_1 + 18d]$

$$2a_1 + 18d = 44$$

$$a_1 + 9d = 22$$

Sad pravimo sistem:

$$a_1 + 10d = 25$$
$$a_1 + 9d = 22 /\cdot(-1)$$

$$a_1 + 10d = 25$$
$$-a_1 - 9d = -22$$

$d = 3 \Rightarrow a_1 + 30 = 25 \Rightarrow a_1 = -5$

Znači niz je : -5,-2,1,4,7,…

Srednji članovi su a_{10} i a_{11}

$$a_{10} = a_1 + 9d = -5 + 27 = 22$$
$$a_{11} = a_1 + 10d = -5 + 30 = 25$$

8) Izmedju brojeva -5 i 30 umetnuti aritmetički niz od šest članova. Koliki je zbir svih osam članova?

U ovom zadatku ćemo iskoristiti formula : $d = \frac{b-a}{k+1}$

$a=-5$
$b=30 \qquad d=\frac{30-(-5)}{6+1}=\frac{35}{7}=5$
$k=6$

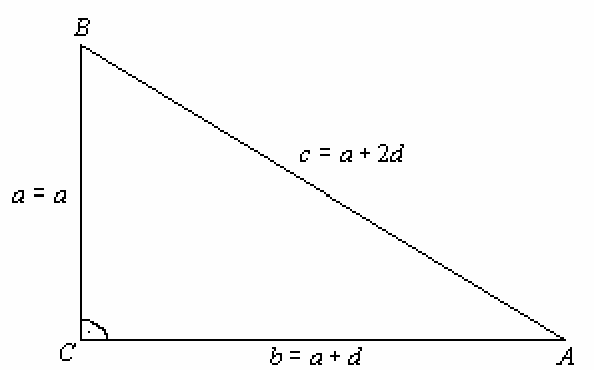
Niz je -5,0,5,10,15,20,25,30 $\quad a_1=-5 \quad$ i $\quad a_8=30$

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

$S_8=\frac{8(-5+30)}{2}=4\cdot 25=100$

Dakle $S_8=100$

9) Važi pitagorina teorema: $a^2+b^2=c^2$



Pošto je $d=3$

$a=a$

$b=a+d=a+3$

$c=a+2d=a+6$

Zamenimo ovo u Pitagorinu teremu:

$a^2+b^2=c^2$

$$a^2+(a+3)^2=(a+6)^2$$
$$a^2+a^2+6a+9=a^2+12a+36$$
$$a^2+6a+9-12a-36=0$$
$$a^2-6a-27=0$$

$$a_{1,2}=\frac{6\pm 12}{2}$$
$$a_1=9,$$
$$a_2=-3$$

Dakle stranice su:

$$a=9$$
$$b=a+3=9+3=12$$
$$c=a+6=9+6=15$$

10) Odrediti x tako da brojevi log2, log(2^x -1), log(2^x +3) budu uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Upotrebićemo $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ tj, $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$

$$\log 2, \log(2^x-1), \log(2^x+3)$$
$$\log(2^x-1)=\frac{\log 2+\log(2^x+3)}{2}$$
$$2\log(2^x-1)=\log 2\cdot(2^x+3)$$
$$\log(2^x-1)^2=\log 2\cdot(2^x+3)$$
$$(2^x-1)^2=2\cdot(2^x+3).....smena 2^x=t$$
$$(t-1)^2=2(t+3)$$
$$t^2-2t+1=2t+6$$
$$t^2-4t-5=0$$
$$t_{1,2}=\frac{4\pm 6}{2}$$
$$t_1=5$$
$$t_2=-1$$

Vratimo se u smenu:

$2^x=5$ ili $2^x=-1$

$\underline{x=\log_2 5}$ nemoguće